

# THESE

présentée devant

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

pour l'obtention du

**DIPLOME DE DOCTORAT**

par

**Hassan TIMOUYAS**

---

**Analyse et Analyse Numérique des Singularités en  
Electromagnétisme**

---

Soutenue devant le jury composé de :

<b>J.L. COULOMB</b>	Professeur à l'INPG, Grenoble	Président
<b>P. CIARLET</b>	Enseignant-chercheur à l'ENSTA	Rapporteur
<b>L. KRÄHENBÜHL</b>	DR CNRS au CEGELY, Ecole Centrale de Lyon	Directeur
<b>Z. MGHAZLI</b>	Professeur à Université Ibn Tofail de Kenitra, Maroc	Rapporteur
<b>M. MOUSSAOUI</b>	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon	Directeur

FORMATION DOCTORALE EN ANALYSE NUMERIQUE,  
EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET CALCUL  
SCIENTIFIQUE

Ecole Doctorale MathIf



# Remerciements.

Je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance aux Messieurs les Professeurs M. Moussaoui et L. Krähenbühl, directeurs de cette thèse, pour le rôle d'initiateurs qu'ils ont joué dans mes recherches, pour ses conseils dès le début de mon travail.

Je remercie Mme Z. Mghazli et M. P. Ciarlet et d'avoir accepté de rapporter sur ce mémoire. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance pour leurs conseils, l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et la bienveillance qu'ils ont eue à mon égard.

Je voudrais aussi adresser mes vifs remerciements à M. J.L. Coulomb qui a participé à l'examen et au jury de cette thèse.

Je salue l'ensemble des membres du département de Mathématiques Appliquées et ceux du laboratoire CEGELY, de l'école centrale de Lyon, mes collègues de D.E.A et mon collègue de bureau: Hicham Souhail.

Je tiens également à remercier les membres du département de Mathématiques de l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne de m'accepter de travailler avec eux comme un A.T.E.R cette année.

Je remercie mes parents, mes frères, ma petite soeur qui m'ont encouragé, depuis mon arrivée en France et je leur dis qu'ils me manquent beaucoup.

Je remercie également mes amis qui n'ont pas hésité à prendre de leur temps pour m'aider dans les moments les plus difficiles.

Un merci particulier à ma chère Nihal Rafiq, qui est décédée malheureusement l'année passée. Nihal, je ne t'oublierai jamais...

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, à titres divers, ont contribué au bon déroulement de ce travail.



# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Le problème électrostatique dans un polygone à coins non convexes</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Approximation par éléments finis du problème du laplacien dans un domaine à coins.</b>	<b>17</b>
1.1 Position du problème . . . . .	17
1.2 Problème continu. Rappels . . . . .	17
1.2.1 Existence et unicité de la solution . . . . .	18
1.2.2 Régularité de la solution . . . . .	18
1.3 Approximation par éléments finis . . . . .	23
1.3.1 Méthode standard . . . . .	23
1.3.2 Méthode de raffinement de maillage . . . . .	25
1.3.3 Méthode d'adjonction des singularités . . . . .	32
1.3.4 Approximation des coefficients des singularités . . . . .	33
<b>2 Etude d'un problème elliptique dans un domaine à coins.</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Position du problème . . . . .	35
2.3 Structure de la solution . . . . .	37
2.3.1 Comportement de la solution au voisinage du coin . . . . .	37
2.3.2 Problème équivalent . . . . .	38
2.3.3 Etude du coefficient de singularité . . . . .	40
2.4 Domaine modifié et étude de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi . . . . .	46
2.4.1 Description du domaine arrondi et problème associé . . . . .	46
2.4.2 Expression explicite de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi . . . . .	47
2.4.3 Expression approchée par une approche éléments finis . . . . .	51
2.4.4 Estimation d'erreur . . . . .	52
2.4.5 Tests numériques . . . . .	53
2.4.6 Application en électrotechnique . . . . .	63

## II Le problème électrostatique dans une géométrie axisymétrique avec singularités 65

<b>3</b>	<b>Position du problème.</b>	<b>67</b>
3.1	Géométrie axisymétrique avec singularités . . . . .	67
3.1.1	Singularité de type conique . . . . .	67
3.1.2	Singularité de type arête . . . . .	67
3.2	Position du problème . . . . .	69
3.3	Réduction à un problème dégénéré en dimension deux . . . . .	69
3.4	Estimation a priori . . . . .	71
3.5	Relations entre la solution et la solution réduite . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Etude d'un problème elliptique axisymétrique en dimension trois, dans un domaine à singularité conique.</b>	<b>77</b>
4.1	Structure de la solution . . . . .	78
4.1.1	Décomposition en partie régulière et partie singulière . . . . .	78
4.1.2	Formule de représentation des coefficients de singularité . . . . .	85
4.2	Le domaine avec le coin arrondi . . . . .	88
4.2.1	Description du domaine arrondi et problème associé . . . . .	88
4.2.2	Expression analytique de la dérivée normale de la solution au milieu de "l'arrondi" . . . . .	89
4.2.3	Estimation d'erreur par une approche éléments finis . . . . .	91
4.3	Résultats numériques: Comportement de la dérivée normale en fonction du rayon de courbure . . . . .	92
4.3.1	Calcul de l'exposant de singularité . . . . .	92
4.3.2	Calcul du coefficient de singularité . . . . .	93
4.3.3	Calcul de la dérivée normale au milieu de l'arrondi . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Etude d'un problème elliptique axisymétrique en dimension trois, dans un domaine à singularité d'arête.</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	106
5.2	Structure de la solution . . . . .	107
5.2.1	Comportement de la solution au voisinage de singularité . . . . .	107
5.2.2	Calcul du coefficient de singularité . . . . .	109
5.3	Domaine arrondi et étude de la dérivée normale de la solution associée au milieu de l'arrondi . . . . .	111
5.3.1	Expression de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi	111
5.3.2	Estimation d'erreur entre la valeur exacte et la valeur approchée . .	114
5.3.3	Résultats numériques . . . . .	115
5.4	Un autre problème modèle . . . . .	120
5.4.1	Position du problème . . . . .	120
5.4.2	Coefficient de singularité . . . . .	120
5.4.3	Domaine arrondi et problème associé . . . . .	121
5.4.4	Expression de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi	122
5.4.5	Résultats numériques . . . . .	123

<b>III Comparaison en norme des solutions du laplacien dans les domaines avec angle vif et arrondi</b>	<b>129</b>
<b>Introduction</b>	<b>131</b>
<b>6 Comparaison en norme des solutions.</b>	<b>133</b>
6.1 Description du problème. . . . .	133
6.1.1 Domaine à point conique . . . . .	133
6.1.2 Domaine arrondi . . . . .	134
6.2 Préliminaires . . . . .	134
6.3 Des estimations en norme sur le bord . . . . .	135
6.4 Estimation en norme de la différence des solutions . . . . .	137
6.5 La norme $H^2$ de la solution dans le domaine arrondi pour le cas bidimensionnel . . . . .	139
6.6 Approximation numérique . . . . .	142
<b>7 Le problème axisymétrique.</b>	<b>145</b>
7.1 Des estimations en norme des solutions . . . . .	145
7.2 Estimation en norme de la différence des solutions du problème de Laplacien modifié . . . . .	146
7.2.1 Préliminaires . . . . .	146
7.2.2 Estimation en norme de la différence des solutions . . . . .	148
<b>Annexe 1: Passage d'un problème non homogène à un problème homogène</b>	<b>151</b>
.1 Le problème du laplacien dans un polygone . . . . .	151
.2 Le problème du laplacien modifié . . . . .	152
<b>Résumé</b>	<b>155</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>156</b>





# Introduction générale

Ce travail est le premier fruit d’une collaboration sur le thème des singularités entre le Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY) et le laboratoire de mathématiques appliquées MAPLY.

La plupart des objets de notre environnement présentent des irrégularités géométriques comme des pointes, des coins et des arêtes. Cela peut être le cas dans la nature, mais c’est encore plus vrai des objets fabriqués. Ces formes particulières sont parfois liées à la fonction même de l’objet, du moins à sa fonction principale (un piolet d’alpinisme est pointu pour être à même de remplir sa fonction principale, qui est de pouvoir être planté dans la neige dure); dans d’autres cas, elle peut être liée à des choix esthétiques (tradition, marketing), ou à des critères de simplicité de fabrication (et donc de coût).

Mais ces formes peuvent conduire à des problèmes de fonctionnement. L’exemple typique est celui du piolet, qui peut se comporter comme un parafoudre, et créer ainsi la mort de ceux qu’il était censé protéger : le choix fait pour assurer la fonction principale (mécanique) peut être inadéquat par rapport à une fonction secondaire (électromagnétique). D’une manière assez générale, les formes à singularité peuvent conduire à des “problèmes” (par exemple fragilité ou rupture en mécanique, claquages en électromagnétisme) ou en tout cas à des comportements très particuliers, qui sont parfois indésirables, mais aussi parfois recherchés (par exemple dans le cas du parafoudre).

En électrostatique, précisément, on sait qu’au voisinage des pointes ou des arêtes conductrices, le champ électrique peut être très intense : les quelques solutions analytiques connues dans des configurations très particulières indiquent même que ce champ tend vers l’infini sur la singularité géométrique. Un champ électrique très intense, même sur un volume extrêmement réduit, peut conduire à un changement de la physique du phénomène : des charges électriques peuvent être arrachées du conducteur, ce qui peut donner naissance à un “ claquage ” : le milieu considéré jusque là comme isolant autour du conducteur ne l’est plus.

On sait aussi depuis le XVIIIème siècle qu’il est possible d’avoir une certaine maîtrise de l’intensification du champ vers les conducteurs en choisissant soigneusement les rayons de courbure des surfaces de ces conducteurs : le choix de formes arrondies permet de limiter les valeurs extrêmes du champ (ainsi l’alpiniste rattrapé par l’orage plantera-t-il une pomme de terre - objet arrondi, mais aussi humide et salé, donc relativement conducteur - sur la pointe de son piolet, limitant par la-même l’ “ effet de pointe ” électrostatique).

Plus généralement, les objets ne contiennent jamais réellement de pointes, d’arêtes ou

de coins : il existe toujours une échelle d'observation pour laquelle un certain arrondi peut être pris en compte, même si sa valeur n'est pas toujours connue avec précision, si elle varie éventuellement d'un point à l'autre d'une arête, ou si elle diffère entre plusieurs exemplaires du même dispositif.

La maîtrise de ce type de phénomène implique que l'on sache calculer le champ, gradient du potentiel, autour de ces “ singularités ” géométriques. Mais en plus, un bon modèle mathématique de ces “ singularités ” devrait être capable de prendre en compte une notion complémentaire de rayon de courbure. L'idéal, vu de l'ingénieur de conception, serait que ce rayon intervienne comme un paramètre (dont on ne connaîtrait que le domaine possible de variation) qui ne serait fixé qu'au moment de l'exploitation des résultats; et en plus que le modèle numérique soit décrit avec des angles vifs (ce qui conduirait à une grosse économie de moyens dans l'étape du maillage).

## Motivation

Nous vivons dans un monde de singularités, car des nombreux objets quotidiens présentent des irrégularités telles que des coins, des pointes ou des arêtes.

Et la présence de ces singularités, par exemple: angles vifs, dans des pièces mécaniques ou des dispositifs en électrotechnique et dans de nombreux domaines en technologie en général n'est pas un fait rare.

Il est également bien connu que ces angles vifs, pointes, fissures voulus ou non peuvent poser des problèmes au niveau du fonctionnement des dispositifs qui les présentent (fragilité, rupture, ruine en mécanique, phénomènes de claquage en électrotechnique..).

Au plan mathématique, l'analyse des problèmes aux limites qui modélisent ces phénomènes montre également le comportement singulier des solutions au voisinage de ces angles; citons par exemple, les travaux de Kondratiev [33], Grisvard [27] et Dauge [25].

En électrotechnique précisément on sait qu'au voisinage des pointes ou des arêtes d'un dispositif le champ électrique et/ou magnétique peut être très intense et donner lieu à des phénomènes indésirables.

Une idée intuitive et très ancienne est dans ces cas d' “**arrondir**” les angles et par là d'essayer d'atténuer l' “**effet de pointe**”. On peut alors facilement imaginer qu'il existe de nombreuses manières d'arrondir des angles et qu'un arrondi est entre autres caractérisé par son rayon de courbure.

Ainsi, notre travail est l'étude des problèmes électrostatiques dans une géométrie axisymétrique dont le bord présente des singularités.

Quel est maintenant l'intérêt de mener une étude mathématique de ces singularités? Il est connu que le comportement singulier de la solution est situé au voisinage des singularités et qu'en dehors de ce voisinage la solution est assez régulière. Le but principal de ce travail est d'étudier le comportement du champ électrique au niveau de “l'arrondi”. Par conséquent, une question très intéressante se pose:

**À partir de la connaissance du comportement singulier du champ électrique dans le domaine non régulier, peut-on étudier celui au milieu de l'arrondi en fonction du rayon de courbure de ce dernier?**

C'est l'étude mathématique de ce problème qui nous a permis d'y répondre en utilisant une approche numérique.

Les principaux objectifs de ma thèse sont:

D'une part, étudier le problème en présence de singularités et déterminer le comportement singulier de la solution, en caractérisant ces paramètres qui sont calculables (fonction singulière, exposant de singularité, coefficient de singularité connu souvent par le nom du facteur d'intensité).

D'autre part,

- lisser les pièces qui présentent des irrégularités. Ce lissage conduit à arrondir l'angle de coins rentrants et à obtenir des **“arrondis”**, dont on peut calculer les rayons de courbure moyen,
- Caractériser le champ électrique ou magnétique modifié en fonction du rayon de courbure et des paramètres singuliers, sans faire de calcul direct.

## Présentation du plan

Dans ce contexte, ce travail est composé de trois parties indépendantes dont le contenu peut se résumer comme suit:

### Première partie:

La première partie traite le problème bidimensionnel du laplacien dans un polygone non convexe.

- Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notations et résultats pour la résolution du problème mêlé du laplacien dans un polygone non convexe: existence et unicité de la solution, régularité, comportement de l'approximation numérique et méthodes de raffinement de maillage.
- Au deuxième chapitre, après avoir étudié le comportement singulier de la solution avec un angle vif, nous donnons deux méthodes numériques permettant d'extraire avec précision le coefficient caractéristique de la singularité de la solution. Nous définissons et étudions ensuite le problème modifié par un arrondi ; en particulier, nous montrons que le champ au milieu de cet arrondi peut être déterminé par une méthode exactement similaire à l'une de celles proposées dans le cas singulier pour estimer le coefficient de singularité (en utilisant la solution numérique d'un problème modifié, solution intégrée “loin” de la singularité). Des expressions bornant l'erreur de discrétisation sont chaque fois proposées. Pour un angle d'ouverture  $\omega$  et un rayon de courbure  $\epsilon$  donnés, le champ semble dépendre de  $\epsilon^{-1+\pi/\omega}$ : cette proposition se vérifie sur des exemples test, mais il reste malheureusement un coefficient jusqu'ici imprévisible, dépendant des conditions aux limites.

## **Deuxième partie:**

La deuxième partie consiste à reprendre le problème posé dans la première partie, mais dans une géométrie tridimensionnel, en particulier axisymétrique présentant des singularités.

- Aux chapitres trois, quatre et cinq, nous reprenons successivement ces mêmes éléments, dans le cas du point conique axisymétrique, puis de l'arête axisymétrique. Les résultats obtenus sont comparables, et les méthodes mises au point pour le cas 2D peuvent être facilement adaptées.

## **Troisième partie:**

Dans la troisième partie, on propose quelque résultats de comparaison en norme entre la solution dans le domaine modifié arrondi, avec celle dans le domaine initial avec angle vif.

- Nous proposons enfin aux chapitres six et sept, une comparaison en normes des résultats correspondant au cas singulier et au cas arrondi, pour les trois types de géométries étudiés.

## Partie I

# Le problème électrostatique dans un polygone à coins non convexes



# Introduction

## Introduction

Le but de cette première partie, dans un premier temps est de rappeler quelques notations et résultats de la résolution d'un problème du laplacien dans un polygone plan non convexe  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Nous notons  $\Gamma$  la partie de la frontière  $\Gamma_D$  constituée de deux segments qui s'intersectent au coin  $O$ .

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Gamma_D, \quad -\epsilon \leq y \leq 0\}.$$

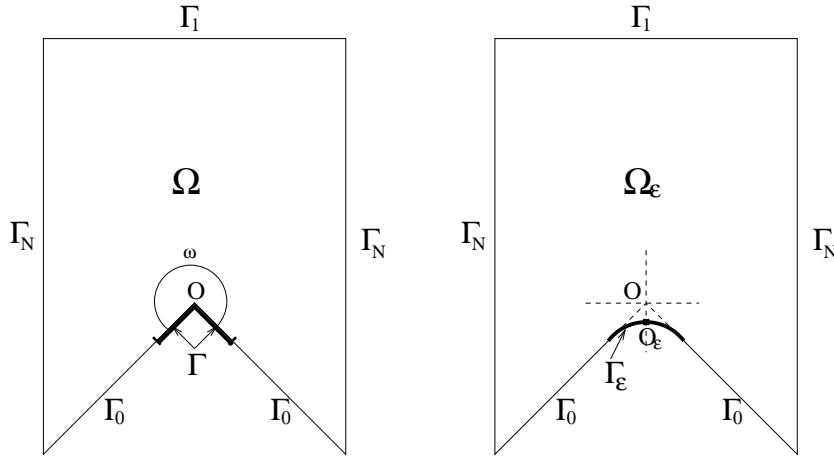


Figure 1: L'ouvert  $\Omega$  et son arrondi  $\Omega_\epsilon$

Il est bien connu, cf. par exemple les travaux de Kondratiev [33], Grisvard [27], qu'une solution d'un problème aux limites sur un domaine polygonal à point conique, admet une décomposition en parties régulière et singulière. La forme explicite de cette singularité est caractérisée par:  $\lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)\varphi(r)$ , avec:

- $\lambda \in \mathbb{R}$  le coefficient de singularité,
- $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$  l'exposant de singularité, où  $\omega$  est l'angle d'ouverture du coin  $O$ ,
- $\varphi$  une fonction de troncature convenable.

Nous présentons des formules pour le calcul du coefficient  $\lambda$ , cf. (Théorème 5.2.1, Proposition 2.3.2). Nous rappelons aussi, dans le premier chapitre une méthode de raffinement

de maillage due à G.Raugel [51].

Dans le deuxième chapitre, on considère le problème:

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = h_0 \text{ sur } \Gamma \cup \Gamma_0, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \setminus \Gamma \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N.$$

Nous montrons que ce problème est équivalent à un problème de type (cf. Annexe 1):

$$-\Delta v = f \text{ dans } \Omega, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N.$$

Après l'arrondissement de l'angle du coin  $O$ , nous présentons à l'aide de la technique de potentiel, une relation explicite de la dérivée normale de la solution  $v_\epsilon$  dans le domaine arrondi  $\Omega_\epsilon$ , au milieu de l'arrondi  $O_\epsilon$ , cf. Théorème 2.4.1:

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* dx,$$

avec:

- $f$  le second membre du problème dans le domaine avec angle vif,
- $v^*$  une fonction à construire.

Nous prouvons numériquement que la valeur approchée de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  se comporte comme:

$$\left( \frac{\partial v_{\epsilon,h}}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h = K \epsilon^{\alpha-1}, \quad \text{avec } K = F(\alpha)G(h_0).$$

Enfin, nous montrons, dans la proposition 2.4.4 que la valeur exacte de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  se comporte comme sa valeur approchée.



# Chapitre 1

## Approximation par éléments finis du problème du laplacien dans un domaine à coins.

### 1.1 Position du problème

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats concernant le comportement de la solution du problème de Dirichlet posé dans un domaine à coins [27][33]. Nous donnons le théorème sur la décomposition de la solution en partie régulière et singulière. Ensuite nous utiliserons ce résultat pour connaître la régularité globale de la solution et montrer ainsi qu'elle appartient à certains espaces de Sobolev à poids que nous précisons.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné, polygonal de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière lipchitzienne  $\partial\Omega$ . Posons  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \bar{\Gamma}_i$  où les  $\Gamma_i$  sont des segments ouverts et désignons par  $\omega_i \in ]0, 2\pi[$  l'ouverture de l'angle vers l'intérieur de  $\Omega$  au sommet  $O_i = \bar{\Gamma}_i \cap \bar{\Gamma}_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , avec  $\Gamma_{N+1} = \Gamma_1$ . Sur  $\Omega$  et  $\Gamma_i$ , nous considérons les espaces de Sobolev usuels  $H^s(\Omega)$  et  $H^s(\Gamma_i)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , munis respectivement des normes  $||\cdot||_{s,\Omega}$  et  $||\cdot||_{s,\Gamma_i}$  et des semi-normes  $|\cdot|_{s,\Omega}$  et  $|\cdot|_{s,\Gamma_i}$ .

Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $\Omega$  a un seul angle supérieur à  $\pi$ .

Dans la suite, on s'intéressera au cas de l'ouvert  $\Omega$  de la figure 1.1, où  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  et  $\Gamma_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_5$  forment une partition de  $\partial\Omega$ . On notera  $n$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Omega$ .

### 1.2 Problème continu. Rappels

Etant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , soit  $u \in H^1(\Omega)$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Nous rappelons brièvement dans ce paragraphe quelques résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution.

### 1.2.1 Existence et unicité de la solution

Considérons le sous espace  $V$  de  $H^1(\Omega)$  des solutions admissibles pour le problème (1.2.1).

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad v|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad (1.2.2)$$

muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

**Proposition 1.2.1** *Le problème (1.2.1) admet une solution unique  $u$  dans  $V$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $f$  telle que:*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega}. \quad (1.2.3)$$

**Preuve.** La démonstration est classique comme application du théorème de Lax-Milgram et de l'inégalité de Poincaré. ■

### 1.2.2 Régularité de la solution

Considérons le sous espace  $W$  de  $H^2(\Omega)$  des solutions régulières pour le problème (1.2.1).

$$W = \{v \in H^2(\Omega) \quad \text{tel que} \quad v|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0\}, \quad (1.2.4)$$

muni de la norme de  $H^2(\Omega)$ .

**Théorème 1.2.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $v \in W$ , on a*

$$\|v\|_{2,\Omega} \leq C \|\Delta v\|_{0,\Omega}. \quad (1.2.5)$$

**Preuve.** Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant. ■

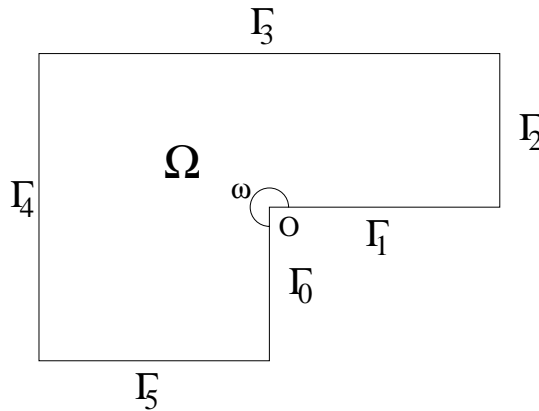


Figure 1.1: Polygone à un coin non convexe

**Lemme 1.2.1** Pour tout  $v$  dans  $W$ , on a

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\|_{0,\Omega}^2.$$

**Preuve.** On sait que d'après [27],  $W \cap H^3(\Omega)$  est dense dans  $W$ , donc il suffit de prouver cette égalité pour les éléments de  $W \cap H^3(\Omega)$ .

Soit  $v \in W \cap H^3(\Omega)$ . Par intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx dy = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right|^2 dx dy + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} n_2 \right) ds,$$

où  $n = (n_1, n_2)$  est le vecteur normal unitaire à  $\Gamma_i$ . Il s'agit donc de montrer que la somme des intégrales sur le bord est nulle. Soit  $\tau$  le vecteur tangent unitaire à  $\Gamma_i$ ; on pose

$$I_i = \int_{\Gamma_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} n_2 \right) ds,$$

on a

$$I_i = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} n_2 \right) ds = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) ds.$$

Or, sur  $\Gamma_i$ ,  $v = 0$  ou  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  donc, si l'on a le premier cas on pose  $(\alpha_i, \beta_i) = (\tau_1, \tau_2)$ , sinon on pose  $(\alpha_i, \beta_i) = (n_1, n_2)$ , et dans les deux cas on a

$$\alpha_i \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

On distingue deux cas:

- Si  $\alpha_i \beta_i = 0$  alors l'un au moins des  $\alpha_i$  ou  $\beta_i$  est égal à zéro. Si  $\alpha_i = 0$  alors  $\frac{\partial v}{\partial y}$  s'annule sur  $\Gamma_i$  et de même, si  $\beta_i = 0$  alors  $\frac{\partial v}{\partial x}$  s'annule aussi sur  $\Gamma_i$  et par conséquent  $I_i = 0$ .
- Si  $\alpha_i \beta_i \neq 0$  alors  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{\partial v}{\partial y}$  sur  $\Gamma_i$  et par suite

$$I_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) ds = -\frac{\beta_i}{2\alpha_i} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) \right)^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_i) \right)^2 \right].$$

Ainsi,  $\sum_i I_i$  apparaît comme une somme de contributions des sommets  $O_i$ . La contribution du sommet  $O_{i+1}$  est

$$\begin{cases} +\frac{\beta_{i+1}}{2\alpha_{i+1}} \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) \right)^2 - \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) \right)^2 & \text{si } \alpha_i \beta_i \neq 0 \text{ et } \alpha_{i+1} \beta_{i+1} \neq 0, \\ -\frac{\beta_i}{2\alpha_i} \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) \right)^2 & \text{si } \alpha_i \beta_i \neq 0 \text{ et } \alpha_{i+1} \beta_{i+1} = 0, \\ +\frac{\beta_{i+1}}{2\alpha_{i+1}} \left( \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) \right)^2 & \text{si } \alpha_i \beta_i = 0 \text{ et } \alpha_{i+1} \beta_{i+1} \neq 0. \end{cases}$$

Or  $O_{i+1}$  appartient à  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$ , donc en ce point, on a

$$\alpha_i \frac{\partial v}{\partial x}(O_{i+1}) + \beta_i \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) = 0 \text{ et } \alpha_{i+1} \frac{\partial v}{\partial x}(O_{i+1}) + \beta_{i+1} \frac{\partial v}{\partial y}(O_{i+1}) = 0.$$

Ainsi, l'utilisation des deux relations montre facilement que  $\sum_{i=1}^N I_i = 0$ , et le lemme est prouvé. ■

Revenons à la démonstration du théorème précédent.

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx dy &= \int_{\Omega} (|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}|^2 + |\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}|^2) dx dy + 2 \int_{\Omega} |\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}| |\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}| dx dy \\ &= \int_{\Omega} (|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}|^2 + |\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}|^2 + 2 |\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}|^2) dx dy \\ &\geq \|v\|_{2,\Omega}^2, \end{aligned}$$

par suite,

$$\|v\|_{2,\Omega}^2 = \|v\|_{2,\Omega}^2 + \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + c_1^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = (1 + c_1^2) \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2,$$

$c_1$  étant la constante de Poincaré, d'où le théorème. ■

**Théorème 1.2.2** *La solution  $u$  s'écrit  $u = u_R + \lambda S$ , avec  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\lambda$  un réel et  $S$  la fonction singulière attachée au coin  $O$ , décrite en coordonnées polaires par*

$$S(r, \theta) = r^\alpha \sin(\alpha \theta) \varphi(r)$$

où  $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$  est l'exposant de singularité et  $\varphi$  une fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de  $O$ .

**Preuve.** Cf. [27]. ■

## Fonction singulière duale

Considérons d'abord la fonction

$$S^*(r, \theta) = r^{-\alpha} \sin(\alpha \theta) \varphi(r). \quad (1.2.6)$$

Il est facile de vérifier que  $S^*$  est dans  $L^2(\Omega)$ , mais qu'elle n'est pas dans  $H^1(\Omega)$  et que  $\Delta S^*$  est dans  $L^2(\Omega)$ . Par suite le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } v^* \in V \text{ tel que:} \\ a(v^*, v) = \int_{\Omega} \Delta S^* v dx, \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

admet une et une seule solution  $v^* \in V$ .

La fonction singulière duale associé au problème (1.2.1) est définie par:  $u^* = v^* + S^*$ .

**Lemme 1.2.2** *La fonction singulière duale vérifie:*

- $\Delta u^* = 0$  dans  $\Omega$ ,
- $u^*$  vérifie les conditions aux limites du problème (1.2.1):

$$u^* = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N.$$

**Théorème 1.2.3** *Le coefficient de singularité  $\lambda$  est donné par:*

$$\lambda = \frac{1}{\pi}(f, u^*),$$

où  $(., .)$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve.** Pour  $\delta > 0$  destiné à tendre vers zéro, on pose

$$\Omega_\delta = \{(r, \theta) \in \Omega, \quad r > \delta\}.$$

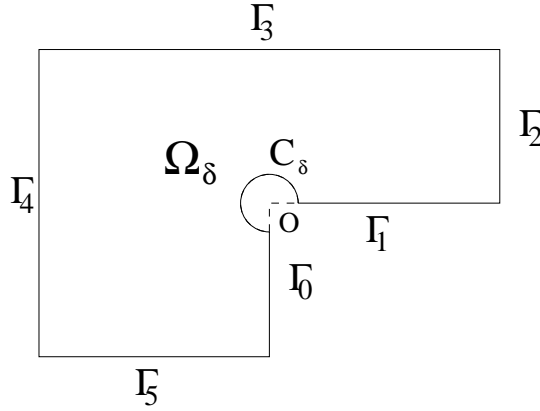


Figure 1.2: Le domaine  $\Omega_\delta$

Comme la fonction singulière duale  $u^*$  est régulière dans  $\Omega_\delta$  et  $\Delta u^* = 0$  dans  $\Omega$ , donc

$$-\int_{\Omega_\delta} f u^* dx = \int_{\Omega_\delta} \Delta u u^* dx = \int_{\partial\Omega_\delta} \left( \frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Compte tenu des conditions aux limites sur  $u$  et  $u^*$ , l'intégrale sur le bord se réduit à une intégrale sur l'arc de cercle  $C_\delta$  de rayon  $\delta$  contenu dans  $\Omega$ ,

$$-\int_{\Omega_\delta} f u^* dx = \int_{C_\delta} \left( \frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\sigma.$$

On utilise les décompositions

$$u = u_R + \lambda S \text{ et } u^* = v^* + S^*,$$

donc

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\delta} f u^* dx &= \lambda \int_{C_\delta} \left( \frac{\partial S}{\partial n} S^* - S \frac{\partial S^*}{\partial n} \right) d\sigma \\ &+ \int_{C_\delta} \left( \frac{\partial u_R}{\partial n} v^* - u_R \frac{\partial v^*}{\partial n} + \frac{\partial u_R}{\partial n} S^* - u_R \frac{\partial S^*}{\partial n} + \lambda \left( \frac{\partial S}{\partial n} v^* - S \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions  $u$ ,  $u^*$ ,  $S$  et  $S^*$  sont régulières dans  $\Omega_\delta$ , donc le second membre tend vers zéro avec  $\delta$ . Par conséquent

$$- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} f u^* dx = \lambda \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \left( \frac{\partial S}{\partial n} S^* - S \frac{\partial S^*}{\partial n} \right) d\sigma.$$

On choisit la fonction  $\varphi$  de telle sorte que  $\varphi(r) = 1$  sur  $C_\delta$ , donc

$$- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} f u^* dx = \lambda \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} (-\alpha r^{-1} \sin^2(\alpha\theta) - \alpha r^{-1} \sin^2(\alpha\theta)) d\sigma,$$

et

$$- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} f u^* dx = -2\alpha\lambda \int_0^\omega \sin^2(\alpha\theta) d\theta.$$

Ainsi

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \int_\Omega f u^* dx.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

**Corollaire 1.2.1** *Soit  $u = u_R + \lambda S$  la solution du problème (1.2.1). Il existe une constante  $C$  indépendante de  $f$  telle que*

$$\|u_R\|_{2,\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve.**  $u_R$  est dans  $W$ , donc d'après le théorème 1.2.1  $\|u_R\|_{2,\Omega} \leq C' \|\Delta u_R\|_{0,\Omega}$  avec  $C'$  une constante positive.

Comme  $-\Delta u_R = f + \lambda \Delta S$ , donc par l'inégalité triangulaire

$$\|\Delta u_R\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} + |\lambda| \|\Delta S\|_{0,\Omega},$$

et d'après le théorème précédent, on déduit que

$$\|u_R\|_{2,\Omega} \leq C' (\|f\|_{0,\Omega} + C \|f\|_{0,\Omega} \|u^*\|_{0,\Omega} \|\Delta S\|_{0,\Omega}).$$

D'où le résultat. ■

## 1.3 Approximation par éléments finis

### 1.3.1 Méthode standard

Soit  $(T_h)_h$  une triangulation régulière de  $\Omega$  en triangles de diamètres inférieurs à  $h$ , un paramètre positif destiné à tendre vers zéro.

On définit l'espace  $V_h$  des solutions approchées par:

$$V_h = \{v_h \in V; (v_h)_{/K} \in P_1(K), \forall K \in (T_h)\}. \quad (1.3.7)$$

On définit le problème discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que:} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

avec  $a(.,.)$  la forme bilinéaire associée à  $-\Delta$ .

**Lemme 1.3.1** *Le problème (1.3.8) admet une solution unique  $u_h \in V_h$ . ■*

En ce qui concerne l'ordre d'approximation de  $u_h$  vers  $u$ , nous avons le résultat classique,

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

$C$  étant une constante positive indépendante de  $h$ . Comme  $u \in H^t(\Omega)$  avec  $t > 1$ , elle est continue et par suite on peut prendre pour  $u_h$  l'interpolé de  $u$  dans  $V_h$  qu'on note  $\Pi_h u$ . On a alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega},$$

et si  $u \in H^2(\Omega)$ , nous avons d'après [17] par exemple

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega}.$$

Pour notre situation ce n'est pas le cas, mais on a:

**Théorème 1.3.1** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^\alpha \|f\|_{0,\Omega}, \quad (1.3.9)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{2\alpha} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (1.3.10)$$

**Preuve.** Ce théorème est une conséquence du lemme suivant. ■

**Lemme 1.3.2** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|S - \Pi_h S\|_{1,\Omega} \leq Ch^\alpha \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve.** Dans la démonstration du lemme et du théorème ci-dessus,  $c$  et  $c'$  désigneront des constantes qui peuvent varier d'une inégalité à l'autre mais qui restent indépendantes de  $h$  et de  $f$  et donc aussi de  $u$ . Supposons qu'il existe un réel  $r_0 > 0$  tel que la fonction de troncature  $\varphi$  vérifie

$$\varphi(r) = 1 \quad \text{pour } r < r_0/2 \quad \text{et} \quad \varphi(r) = 0 \quad \text{pour } r > r_0$$

et que  $h$  est petit devant  $r_0$ . On note  $\bar{\Omega}_h$  la réunion des triangles de  $\mathcal{T}_h$  qui ont un sommet en  $O$  et  $\Omega_h^c$  son complémentaire dans  $\Omega$ .

Pour  $\rho > 0$  un réel suffisamment petit, on note  $D_\rho$  l'intersection de  $\Omega$  avec le disque de centre  $O$  et de rayon  $\rho$ . On pose

$$\rho_0 = \sup\{\rho ; D_\rho \subset \bar{\Omega}_h\} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \inf\{\rho ; \bar{\Omega}_h \subset D_\rho\}$$

La triangulation étant régulière, le nombre  $k$  de triangles formant  $\bar{\Omega}_h$  est borné indépendamment de  $h$  et il existe deux constantes  $C_0$  et  $C_1$ , telles que

$$C_0 h \leq \rho_i \leq C_1 h, \quad i = 0, 1.$$

En décomposant  $\Omega$  en  $\bar{\Omega}_h$  et  $\Omega_h^c$ , on a

$$|S - \Pi_h S|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(S - \Pi_h S)|^2 dx dy = \int_{\bar{\Omega}_h} |\nabla(S - \Pi_h S)|^2 dx dy + \int_{\Omega_h^c} |\nabla(S - \Pi_h S)|^2 dx dy$$

La restriction de  $S$  à  $\Omega_h^c$  est dans  $H^2$ . Par ailleurs ses dérivées secondes sont de la forme  $r^{\alpha-2}\psi(\theta)$  avec  $\psi$  continue et bornée. Par suite

$$\int_{\Omega_h^c} |\nabla(S - \Pi_h S)|^2 dx dy \leq Ch^2 |S|_{2,\Omega_h^c}^2 \leq Ch^2 \int_{\rho_0}^{r_0} r^{2\alpha-3} dr \leq Ch^{2\alpha}$$

Pour le second terme on a

$$\int_{\bar{\Omega}_h} |\nabla(S - \Pi_h S)|^2 dx dy \leq 2 \int_{\bar{\Omega}_h} |\nabla S|^2 dx dy + 2 \int_{\bar{\Omega}_h} |\nabla(\Pi_h S)|^2 dx dy$$

Le premier terme du second membre de cette inégalité est majoré par

$$\int_0^{\rho_1} r^{2\alpha-1} dr \leq C' h^{2\alpha}.$$

Pour le second, il est facile de vérifier que sur chaque triangle  $K$  de  $\Omega_h$

$$\int_K |\nabla(\Pi_h S)|^2 dx dy \leq Ch^{2\alpha}.$$

D'où le lemme. ■

Revenons à la démonstration du théorème.

On a  $\Pi_h u = \Pi_h u_R + \lambda \Pi_h S$ . Par suite

$$|u - \Pi_h u|_{1,\Omega} \leq |u_R - \Pi_h u_R|_{1,\Omega} + |\lambda| |S - \Pi_h S|_{1,\Omega}$$

En utilisant le corollaire 1.2.1 et le lemme précédent, on obtient

$$|u_R - \Pi_h u_R|_{1,\Omega} \leq Ch |u_R|_{2,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega},$$

$$|\lambda| |S - \Pi_h S|_{1,\Omega} \leq Ch^\alpha \|f\|_{0,\Omega}.$$

La deuxième estimation dans  $L^2$  s'obtient, en utilisant le procédé d'Aubin-Nitsche, cf. [17], section 19. Ce qui achève la démonstration. ■



### 1.3.2 Méthode de raffinement de maillage

Cette méthode est basée sur le comportement des singularités au voisinage des sommets et sur les espaces de Sobolev avec poids.

Il s'agit de la méthode due à G.Raugel [51].

#### Description de la méthode

Soit  $\delta \in \mathbb{R}_+$ . On définit l'espace des fonctions à poids  $H^{2,\delta}(\Omega)$  par

$$H^{2,\delta}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) ; \ r^\delta D^\beta u \in L^2(\Omega), \ \forall \beta \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\beta| = 2\},$$

on munit cet espace de la norme

$$|||u|||^2 = ||u||_{1,\Omega}^2 + \sum_{|\beta|=2} ||r^\delta D^\beta u||_{0,\Omega}^2.$$

Il est facile de prouver que  $H^2(\Omega) \subset H^{2,\delta}(\Omega)$ .

**Théorème 1.3.2** *Pour tout nombre positif  $\delta$  tel que  $\delta > 1 - \alpha$ , la solution  $u$  du problème (1.2.1) appartient à  $H^{2,\delta}(\Omega)$ .*

**Preuve.** Il suffit de chercher la régularité de la fonction singulière  $S$ . En effet:

Soit  $\beta \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|\beta| = 2$ ,  $r^\delta D^\beta S$  se comporte comme la fonction  $r^{\delta+\alpha-2}$  qui est de carré intégrable dans un voisinage de  $O$  lorsque la condition  $\delta > 1 - \alpha$  est satisfaite. ■

**Remarque 1.3.1** *La fonction singulière  $S$  n'appartient pas à  $H^{2,\delta}(\Omega)$ , pour  $\delta \leq 1 - \alpha$ . ■*

Notons  $W^{2,p}(\Omega)$  l'espace de Sobolev défini par

$$W^{2,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) ; \ D^\beta u \in L^p(\Omega), \ |\beta| \leq 2\}. \quad (1.3.11)$$

**Lemme 1.3.3** *Soit  $\delta < 1$ , alors  $H^{2,\delta}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $W^{2,p}(\Omega)$  pour  $1 < p < \frac{2}{1+\delta}$ .*

**Preuve.** Soit  $v \in H^{2,\delta}(\Omega)$ , l'inégalité de Hölder nous permet d'écrire

$$\int_{\Omega} |D^\beta v|^p dx \, dy = \int_{\Omega} |r^{-\delta} r^\delta D^\beta v|^p dx \, dy \leq \left( \int_{\Omega} r^{-\delta p q} dx \, dy \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |r^\delta D^\beta v|^2 dx \, dy \right)^{p/2},$$

avec  $\frac{1}{q} + \frac{p}{2} = 1$ .

La fonction  $r^{-\delta p q}$  est intégrable si  $-\delta p q + 2 > 0$ , donc si l'on remplace  $q$  par sa valeur qui vaut  $\frac{2}{2-p}$ , on voit que l'injection  $H^{2,\delta}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega)$  est satisfaite si  $p$  vérifie la condition  $1 < p < \frac{2}{1+\delta}$ . ■

**Proposition 1.3.1** *Soit  $\delta < 1$ .*

- L'injection de  $H^{2,\delta}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  est compacte.
- L'espace  $H^{2,\delta}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ .

**Preuve.** La démonstration est une conséquence du lemme précédent et des injections suivantes

$$\begin{aligned} W^{2,p}(\Omega) &\hookrightarrow_c H^1(\Omega), \quad p > 1, \\ W^{2,p}(\Omega) &\hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad p > 1. \end{aligned}$$

■

**Lemme 1.3.4** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\inf_{p \in P_1(\Omega)} |||u - p||| \leq C \sum_{|\beta|=2} ||r^\delta D^\beta u||_{0,\Omega}^2, \quad \forall u \in H^{2,\delta}(\Omega). \quad (1.3.12)$$

**Preuve.** Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$(*) \quad |||v|||^2 \leq C \sum_{|\beta|=2} ||r^\delta D^\beta v||_{0,\Omega}^2, \quad \forall v \in P_1^\perp(\Omega),$$

où  $P_1^\perp(\Omega)$  l'orthogonal de  $P_1(\Omega)$  dans  $H^{2,\delta}(\Omega)$ .

En effet, supposons que  $(*)$  est vrai et considérons  $\rho$  la projection de  $u$  sur  $P_1(\Omega)$ . On pose  $v = u - \rho$ , on a bien  $v \in P_1^\perp(\Omega)$ , d'où le lemme.

Démontrons maintenant l'inégalité  $(*)$  par l'absurde.

On construit une suite  $(v_n)$  telle que

$$v_n \in P_1^\perp(\Omega), \quad |||v_n||| = 1 \text{ et } r^\delta D^\beta v_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ pour } |\beta| = 2.$$

D'après la proposition précédente, il existe une sous suite de  $(v_n)$  qu'on note aussi  $(v_n)$  qui converge fortement dans  $H^1$ . Or du fait que

$$|||v_n - v_m|||^2 = ||v_n - v_m||_{1,\Omega}^2 + \sum_{|\beta|=2} ||r^\delta D^\beta (v_n - v_m)||_{0,\Omega}^2,$$

$(v_n)$  est donc une suite de Cauchy dans  $H^{2,\delta}$ , par conséquent  $v_n \rightarrow v \in H^{2,\delta}(\Omega)$ .

D'autre part,  $v_n \in P_1^\perp(\Omega)$ , donc  $v \in P_1^\perp(\Omega)$  et  $r^\delta D^\beta v_n \rightarrow 0$  pour  $|\beta| = 2$  implique que  $r^\delta D^\beta v \rightarrow 0$  pour  $|\beta| = 2$  et par conséquent  $v \in P_1(\Omega)$ .

Ainsi  $v \in P_1(\Omega) \cap P_1^\perp(\Omega)$ . Ceci contredit le fait que  $|||v_n||| = 1 \rightarrow |||v|||$ , d'où  $(*)$ . ■

### Inégalité d'interpolation dans $H^{2,\delta}(\Omega)$

Soit  $\hat{K}$  le triangle de référence de sommets  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  de coordonnées  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$ , cf Figure 1.3. On associe à tout  $u$  dans  $H^{2,\delta}(\hat{K})$ ,  $\hat{\Pi}u \in P_1(\hat{K})$  tel que  $\hat{\Pi}u(\hat{a}_i) = u(\hat{a}_i)$ ,  $i = 1, 3$ . Il est clair que pour tout  $p$  dans  $P_1(\hat{K})$ , on a  $u - \hat{\Pi}u = (I_d - \hat{\Pi})(u - p)$ , comme  $I_d$  et  $\hat{\Pi}$  sont continus de  $H^{2,\delta}(\hat{K})$  dans  $H^1(\hat{K})$ , il existe une constante  $\hat{c}$  telle que

$$||I_d - \hat{\Pi}||_{H^{2,\delta}(\hat{K}) \rightarrow H^1(\hat{K})} \leq \hat{c}.$$

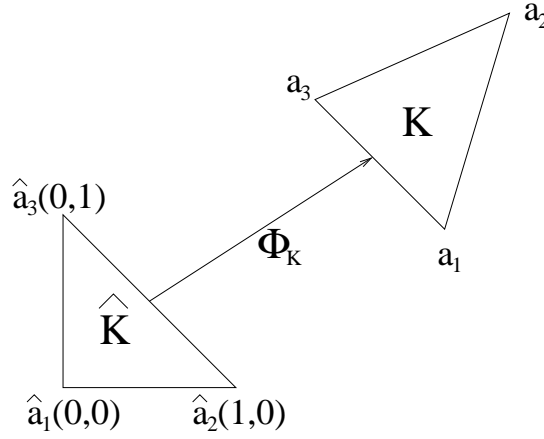


Figure 1.3: Triangle de référence

Par suite

$$\|(I_d - \hat{\Pi})u\|_{1,\hat{K}} = \|(I_d - \hat{\Pi})(u - p)\|_{1,\hat{K}} \leq \hat{c}' \|u - p\|_{H^{2,\delta}(\hat{K})}, \quad \forall p \in P_1(\hat{K}).$$

En prenant le minimum sur tous les  $p$  dans  $P_1(\hat{K})$ , on obtient d'après le lemme précédent

$$\|(I_d - \hat{\Pi})u\|_{1,\hat{K}} \leq \hat{c} \sum_{|\beta|=2} \|r^\delta D^\beta u\|_{0,\hat{K}}^2. \quad (1.3.13)$$

Considérons maintenant un triangle  $K$  de sommets

$$\mathbf{a}_1(x_1, y_1), \quad \mathbf{a}_2(x_2 + x_1, y_2 + y_1) \text{ et } \mathbf{a}_3(x_3 + x_1, y_3 + y_1).$$

Notons par  $\mathbf{x} = (x, y)$  un point de  $K$  et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y})$  un point de  $\hat{K}$ .

Notons aussi

$$d\mathbf{x} = dx \, dy \quad \text{et} \quad d\hat{\mathbf{x}} = d\hat{x} \, d\hat{y}.$$

Le triangle  $K$  est l'image de  $\hat{K}$  par une transformation affine  $\Phi_K$ ,

$$\Phi_K : \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + T_K \hat{\mathbf{x}} \in K, \quad \text{avec } T_K \text{ la matrice } \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$H^{2,\delta}(K) = \{u \in H^1(K) ; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1)^\delta D^\beta u \in L^2(K), \quad |\beta| = 2\},$$

où  $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1)$  la distance entre les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{a}_1$  et  $\Pi_K$  l'opérateur de  $P_1$ -interpolation de  $H^{2,\delta}(K)$  dans  $H^1(K)$ . On a:

**Proposition 1.3.2** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $K$  telle que pour tout  $u$  dans  $H^{2,\delta}(K)$*

$$\|\nabla(u - \Pi_K u)\|_{0,K}^2 \leq C \|T_K^{-1}\|^{2+2\delta} \|T_K\|^4 \sum_{|\beta|=2} \int_K d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1)^{2\delta} |D^\beta u|^2 d\mathbf{x}. \quad (1.3.14)$$

**Preuve.** Posons  $\widehat{u} = u \circ \Phi_K$ . D'une part, on a  $\widehat{u} \in H^{2,\delta}(\widehat{K})$  et d'autre part  $(\Pi_K u) \circ \Phi_K = \widehat{\Pi}_{\widehat{K}} \widehat{u}$ . Ainsi, d'après (1.3.13)

$$\|\nabla(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_{\widehat{K}} \widehat{u})\|_{0,\widehat{K}}^2 \leq \widehat{C} \sum_{|\beta|=2} \|r^\delta D^\beta \widehat{u}\|_{0,\widehat{K}}^2,$$

ou bien,

$$\int_{\widehat{K}} \left| [\nabla(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_{\widehat{K}} \widehat{u})](\widehat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}} \leq \widehat{C} \sum_{|\beta|=2} \int_{\widehat{K}} \left| r(\widehat{\mathbf{x}})^\delta [D^\beta (u \circ \Phi_K)](\widehat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}},$$

en appliquant les règles de dérivation, on obtient

$$\int_{\widehat{K}} \left| T_K [\nabla(u - \Pi_K u)] \circ \Phi_K \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}} \leq \widehat{C} \sum_{|\beta|=2} \int_{\widehat{K}} \left| r(\widehat{\mathbf{x}})^\delta [D^\beta (u \circ \Phi_K)](\widehat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}},$$

puisque

$$\nabla(\widehat{u} - \widehat{\Pi}_{\widehat{K}} \widehat{u}) = \nabla((u - \Pi_K u) \circ \Phi_K) = T_K([\nabla(u - \Pi_K u)] \circ \Phi_K).$$

Or  $\mathbf{x} = \Phi_K(\widehat{\mathbf{x}})$ , donc

$$d\mathbf{x} = T_K d\widehat{\mathbf{x}}, \quad [D^\beta (u \circ \Phi_K)](\widehat{\mathbf{x}}) = (D^\beta u) T_K^2$$

et

$$\begin{aligned} \|T_K\| \int_{\widehat{K}} \left| [\nabla(u - \Pi_K u)] \right|^2 d\mathbf{x} &\leq \widehat{C} \sum_{|\beta|=2} \int_{\widehat{K}} \left| r(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x}))^\delta [(D^\beta u)(\mathbf{x}) T_K^2] \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}}, \\ \int_K \left| \nabla(u - \Pi_K u) \right|^2 d\mathbf{x} &\leq \widehat{c} \|T_K^{-1}\| \|T_K\|^4 \int_{\widehat{K}} \left| r(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x}))^\delta [D^\beta u] \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

le résultat est alors une conséquence du fait que

$$r(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x})) = d(\Phi_K^{-1}(\mathbf{x}), \Phi_K^{-1}(\mathbf{a}_1)) \leq \|T_K^{-1}\| d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1).$$

D'où la proposition. ■

Notons  $\Pi_h$  l'opérateur d'interpolation de  $H^{2,\delta}(\Omega)$  sur  $V_h$ .

**Théorème 1.3.3** *On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifie les hypothèses suivantes:*

1.  $\max_K \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$  avec  $\sigma$  fixé.
2.  $(H_1^\delta)$ :  $h_K \leq \sigma h^{\frac{1}{1-\delta}}$  si  $K$  a un sommet en  $O$ .
3.  $(H_2^\delta)$ :  $h_K \leq \sigma h \inf_K r^\delta$  si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ .

Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq C h \|u\|, \quad \forall u \in H^{2,\delta}(\Omega), \quad \delta < 1. \quad (1.3.15)$$

**Preuve.** Il suffit d'établir la majoration

$$(*) \quad |v - \Pi_h v|_{1,K} \leq ch \|v\|_{H^{2,\delta}(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

On distingue deux cas:

- 1<sup>er</sup> cas: Si  $K$  n'a pas de sommet à l'origine, alors en utilisant les propriétés classiques

$$\|T_K\| \leq \sqrt{2}h_K \quad \text{et} \quad \|T_K^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\rho_K},$$

l'estimation de la proposition précédente et la régularité de la triangulation  $(\mathcal{T}_h)_h$  entraînent

$$|v - \Pi_h v|_{1,K} \leq ch_K^{1-\delta} \|v\|_{H^{2,\delta}(K)},$$

et par conséquent, la condition de raffinement de maillage  $(H_1^\delta)$  entraîne  $(*)$ .

- 2<sup>ème</sup> cas: Si  $K$  n'a pas de sommet à l'origine, on utilise encore la proposition 1.3.2, mais avec  $\delta = 0$ . On obtient

$$|v - \Pi_h v|_{1,K} \leq ch_K \left( \sum_{|\beta|=2} \|\Delta^\beta v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

En insérant le facteur  $r^\delta$  dans les termes  $\sum_{|\beta|=2} \|\Delta^\beta v\|_{0,K}^2$ , on obtiendra

$$|v - \Pi_h v|_{1,K} \leq ch_K \left( \inf_{x \in K} r^\delta(x) \right)^{-1} \left( \sum_{|\beta|=2} \|r^\delta \Delta^\beta v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

La condition  $(H_2^\delta)$  montre que l'estimation  $(*)$  est encore vérifiée pour ces triangles.

■

A présent revenons à l'approximation de la solution du problème (1.2.1).

## Maillage conforme

Fixons un réel  $\delta_0$  vérifiant  $1 - \alpha < \delta_0 < 1$  et construisons une triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifiant les hypothèses du théorème précédent avec  $\delta = \delta_0$ . On lui associe l'espace d'approximation  $V_h$  défini précédemment et  $u_h$  la solution approchée de (1.3.8) obtenue dans  $V_h$ .

Comme corollaire du théorème précédent, on a:

**Corollaire 1.3.1** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|u\|, \quad (1.3.16)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|. \quad (1.3.17)$$

**Preuve.** La démonstration se découle, en utilisant le théorème précédent et le procédé d'Aubin-Nitsche. ■

## Maillage non conforme

**Elément fini  $P_1$  non conforme.** À chaque triangle  $K \in \mathcal{T}_h$ , on associe un élément fini de Lagrange  $(K, P_K, \Sigma_K)$  avec les propriétés suivantes:

- $P_K = P_1(K)$ , l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
- Si  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  désignent les sommets de  $K$  et  $m_i$  le milieu du côté  $a_i a_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  (modulo 3), alors l'ensemble de degrés de liberté est

$$\Sigma_K = \{p(m_i), 1 \leq i \leq 3\}.$$

Il est clair que la famille de triangulations ainsi définie est une famille affine équivalente.

**Problème approché.** On définit l'espace  $V_h$  comme étant le sous espace de  $L^2(\Omega)$  formé de fonctions  $v_h$  dont la restriction  $v_h|_K$  à chaque triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  appartient à  $P_1(K)$ , qui sont continues en chaque milieu d'un côté commun à deux triangles adjacents et égales à zéro en chaque milieu appartenant à un côté situé sur la frontière. Il est clair qu'on n'a pas l'inclusion  $V_h \subset V$ , puisque les fonctions appartenant à l'espace  $V_h$  ne sont pas continues sur  $\bar{\Omega}$  et ne s'annulent pas sur  $\partial\Omega$ .

Par conséquent la forme bilinéaire  $a(.,.)$  n'est plus définie sur  $V_h$ . Nous définissons donc une forme bilinéaire appropriée  $a_h(.,.)$  comme dans [17] par

$$a_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K(v_h, w_h), \quad \forall v_h, w_h \in V_h,$$

où  $a_K(.,.)$  est la restriction de  $a(.,.)$  au triangle  $K$ .

L'approximation par éléments finis du problème  $(P)$  est donnée alors par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que:} \\ a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.3.18)$$

On munit  $V_h$  de la semi-norme

$$||v_h||_h = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_K|_{1,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

**Proposition 1.3.3** *La semi-norme  $||\cdot||_h$  est une norme sur l'espace  $V_h$ .*

**Preuve.** Soit  $v_h \in V_h$  tel que  $||v_h||_h = 0$ , donc  $|v_h|_K|_{1,K} = 0$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , d'où la restriction de  $v_h$  à chaque triangle  $K$  est constante. De plus la continuité aux milieux des côtés et le fait que  $v_h = 0$  aux milieux situés sur la frontière implique que  $v_h \equiv 0$ . ■

**Proposition 1.3.4** *Le problème discret (1.3.18) admet une solution unique  $u_h$  dans  $V_h$ .*

**Preuve.** Il est clair que la forme bilinéaire  $a_h(.,.)$  est continue sur  $V_h \times V_h$ , de plus elle est elliptique et il existe une constante  $\beta > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$a_h(v_h, v_h) \geq \beta ||v_h||_h^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ainsi la proposition est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram. ■

**Estimation de l'erreur**  $\|u - u_h\|_h$ .

**Théorème 1.3.4** *Supposons que la triangulation  $(\mathcal{T}_h)_h$  vérifie les conditions de raffinement  $(H_1^\delta)$  et  $(H_2^\delta)$  quand  $h$  tend vers zéro. Alors il existe une constante  $C$  strictement positive indépendante de  $h$  telle que*

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch \|u\|.$$

**Preuve.** La démonstration de ce théorème est basée sur le second lemme de Strang. L'estimation du premier terme  $\inf_{v_h \in V_h} \|u - u_h\|_h$  vient du théorème 1.3.3. Il reste alors à établir une estimation de l'erreur de consistance  $E_h$ . Comme  $-\Delta u = f$ , on peut écrire pour tout  $w_h \in V_h$ ,

$$E_h(u, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\nabla u \cdot \nabla w_h + \Delta u w_h) dx.$$

On applique sur chaque triangle  $K$  la formule de Green, on obtient

$$E_h(u, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int \frac{\partial u}{\partial n_K} w_h d\sigma,$$

où  $n_K$  est le vecteur normal unitaire extérieur le long de la frontière  $\partial K$  de  $K$ . Pour toute fonction  $g$  définie sur un côté  $S$  de triangle  $K$ , on définit l'opérateur  $\Pi_0$  par

$$\Pi_0 g = \frac{1}{L(S)} \int_S g ds,$$

avec  $L(S)$  est la longueur de  $S$ . ■

**Lemme 1.3.5** *L'erreur de consistance  $E_h$  admet la décomposition suivante*

$$E_h(u, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K(u|_K, w_h|_K), \quad \forall w_h \in V_h,$$

avec  $E_K(.,.)$  définie par

$$E_K(v, p) = \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_k} \frac{\partial v}{\partial n_K} (p - \Pi_0 p) d\gamma_k, \quad \forall v \in H^{2,\delta}(K), \quad \forall p \in P_K,$$

où les  $\gamma_k$  sont les arêtes de  $K$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que

$$(*) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_k} \frac{\partial u}{\partial n_K} \Pi_0(w_h|_K) d\gamma_k = 0.$$

Sur tout segment  $a_i a_j$ , on a

$$\int_{a_i}^{a_j} p d\gamma = |\overrightarrow{a_i a_j}| p(a_{ij}), \quad \forall p \in P_1,$$

$a_{ij}$  étant le milieu du segment  $a_i a_j$ . Autrement dit,  $\Pi_0(p) = p(a_i a_j)$ .

Ainsi, tous les côtés situés sur la frontière n'ont pas de contribution dans la somme (\*), puisque  $w_h$  est nulle aux milieux de ces côtés, ceci d'une part. D'autre part, sur tout côté commun  $S$  a deux triangles adjacents  $K$  et  $K'$ , on a par définition de  $V_h$ ,

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n_K} (w_h|_K - w_h|_{K'}) (m) d\gamma = 0,$$

$m$  étant le milieu de  $S$ . ■

**Lemme 1.3.6** *Sous les hypothèses du théorème 1.3.3, on a pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$*

$$|E_K(u|_K, w_h|_K)| \leq Ch \|u\|_{H^{2,\delta}(K)} |w_h|_{1,K}, \quad \forall w_h \in V_h.$$

**Preuve.** cf. [26]. ■

**Lemme 1.3.7** *Sous les hypothèses du théorème 1.3.3, on a pour tout  $w_h \in V_h$*

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|E_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq Ch \|u\|.$$

**Preuve.** D'après le lemme précédent, on a sur chaque triangle  $K$

$$|E_K(u|_K, w_h|_K)| \leq Ch \|u\|_{H^{2,\delta}(K)} |w_h|_{1,K},$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|E_h(u|_K, w_h|_K)| \leq Ch \|u\| \|w_h\|_h, \quad \forall w_h \in V_h.$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

### 1.3.3 Méthode d'adjonction des singularités

Il s'agit de modifier l'espace  $V_h$  défini par (1.3.7) en lui rajoutant la fonction singulière  $S$ . On définit

$$W_h = \{v_h + \beta S ; \quad v_h \in V_h, \quad \beta \in \mathbb{R}\}. \quad (1.3.19)$$

Le problème: Trouver  $u_h \in W_h$  tel que:

$$a(w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in W_h,$$

admet une et une seule solution  $u_h = u_h^0 + \lambda_h S$ ,  $u_h^0 \in V_h$ ,  $\lambda_h \in \mathbb{R}$ .

On a

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{1,\Omega}.$$

En prenant  $w_h = \Pi_h u_R + \lambda S$ , nous obtenons

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u_R + \lambda S - \Pi_h u_R - \lambda S\|_{1,\Omega} = c \|u_R - \Pi_h u_R\|_{1,\Omega},$$



d'où

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|u_R\|_{2,\Omega},$$

et par le procédé d'Aubin-Nitsche, cf. [17], section 19,

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u_R\|_{2,\Omega}.$$

**Théorème 1.3.5** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega},$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve.** Ce théorème est une conséquence du corollaire 1.2.1. ■

### 1.3.4 Approximation des coefficients des singularités

Il est utile, dans certains problèmes de connaître les coefficients des singularités, ou du moins de pouvoir en calculer une approximation.

Soit  $u \in V$  la solution du problème (1.2.1). On sait que l'expression de  $u$  est

$$u = u_R + \lambda S, \quad u_R \in H^2(\Omega) \text{ et } S \text{ la fonction singulière associée au problème (1.2.1).}$$

La fonction singulière duale s'écrit,

$$u^* = S^* + v^* \text{ avec } S^*(r, \theta) = r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta) \eta(r) \text{ et } v^* \in H^1(\Omega), \text{ vérifiant}$$

$$\begin{cases} \Delta v^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v^* = -S^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v^*}{\partial n} = -\frac{\partial S^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

$$\text{D'après le théorème 1.2.3, } \lambda = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f u^* dx.$$

Soit  $v_h^*$  une approximation de  $v^*$ . Posons

$$\lambda_h = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f (S^* + v_h^*) dx.$$

Alors

$$\lambda - \lambda_h = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f (v^* - v_h^*) dx,$$

et par conséquent

$$|\lambda - \lambda_h| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{0,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}.$$

Ainsi en faisant une approximation de  $v^*$  par des éléments finis standard  $P_1$ , on a d'après le théorème 1.3.1

$$|\lambda - \lambda_h| = O(h^{2\alpha}),$$

et en utilisant le raffinement de maillage proposé par G.Raugel [51], on obtient d'après le corollaire 1.3.1

$$|\lambda - \lambda_h| = O(h^2).$$

**Remarque 1.3.2** *Cette méthode ne nécessite pas le calcul de  $u_h$  pour faire le calcul de  $\lambda_h$ . C'est une méthode très intéressante si on doit résoudre plusieurs fois le même problème avec des second membres  $f$  différents et en particulier pour les problèmes d'évolution. ■*

# Chapitre 2

## Etude d'un problème elliptique dans un domaine à coins.

### 2.1 Introduction

La présence d'angles vifs, dans des pièces mécaniques ou des dispositifs en électrotechnique et dans de nombreux domaines en technologie en général n'est pas un fait rare.

Il est également bien connu que ces angles vifs, pointes, fissures voulus ou non peuvent poser des problèmes au niveau du fonctionnement des dispositifs qui les présentent (fragilité, rupture, ruine en mécanique, phénomènes de claquage en électrotechnique..).

Au plan mathématique l'analyse des problèmes aux limites qui modélisent ces phénomènes montre également le comportement singulier des solutions au voisinage de ces angles.

En électrotechnique précisément on sait qu'au voisinage des pointes ou des arêtes d'un dispositif le champ électrique et/ou magnétique peut être très intense et donner lieu à des phénomènes indésirables.

Une idée intuitive et très ancienne est dans ces cas d' **“arrondir”** les angles et par là d'essayer d'atténuer **“l'effet de pointe”**. On peut alors facilement imaginer qu'il existe de nombreuses manières d'arrondir des angles et qu'un arrondi est entre autres caractérisé par son rayon de courbure.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier le comportement du champ électrique au niveau de **“l'arrondi”** en fonction du rayon de courbure de ce dernier.

### 2.2 Position du problème

Nous nous restreindrons à un modèle très simple en électrostatique que l'on peut décrire par le problème aux limites suivant.

On considère un secteur angulaire plan  $\Sigma$  d'ouverture supérieur à  $\pi$ , un potentiel électrostatique  $u$  dont la valeur est connue sur la frontière et qui est harmonique dans  $\Sigma$ .

Comme nous aurons par la suite à faire des approximations par éléments finis nous sommes, pour des raisons évidentes, amenés à nous restreindre à un domaine borné.

Soit  $\Omega$  l'ouvert défini par:

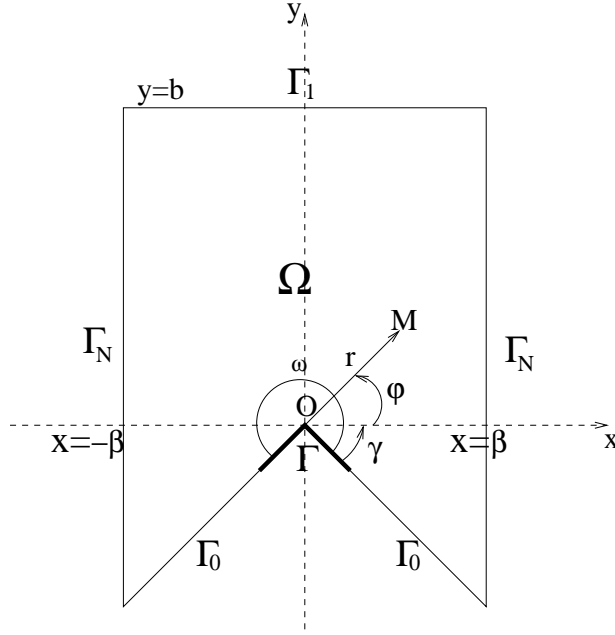


Figure 2.1: L'ouvert  $\Omega$

$$\Omega = \{(x, y) \in \Sigma; -\beta < x < \beta, -b < y < b\}$$

et  $\partial\Omega$  sa frontière, cf. Figure. 2.1.

Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, notons  $\Gamma$  la partie de la frontière  $\partial\Omega$  donnée par:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \partial\Omega / 0 \leq y \leq -\epsilon\}. \quad (2.2.1)$$

Notons que la partie  $\Gamma$  sera remplacée par une courbe arrondie, lorsque on arrondira l'angle du coin non convexe.

Notons aussi  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec

$$\Gamma_N = \{(x, y) \in \partial\Omega; x = \pm\beta\}, \quad \Gamma_D = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial\Omega; y = b\}.$$

Le polygone  $\Omega$  que nous avons considéré a un seul angle supérieure à  $\pi$  qui est supposé placé à l'origine.

Soit  $h_0 \in H^{3/2}(\Gamma \cup \Gamma_0)$  une fonction donnée. On s'intéressera dans la suite au comportement de la solution  $u$  du problème aux limites:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire à  $\Gamma_N$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

**Remarque 2.2.1** Dans les applications en électrotechnique, la fonction  $h_0$  sera supposée constante. ■

## 2.3 Structure de la solution

### 2.3.1 Comportement de la solution au voisinage du coin

Considérons les coordonnées polaires:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  et  $\theta = \varphi + \gamma$ , avec  $\gamma = \frac{\omega - \pi}{2}$ , cf. Figure 2.1.

Pour  $\rho > 0$  fixé, considérons le sous domaine  $D_\rho$  de  $\Omega$  défini par:

$$D_\rho = \{(r, \theta) ; 0 < r < \rho\} \cap \Omega.$$

$\rho$  est choisi de telle façon que  $D_\rho$  ne contienne aucun sommet de  $\Omega$  autre que  $O$ .

Il est connu qu'en dehors de  $D_\rho$ , la solution  $u$  a la régularité  $H^2$ . Par contre en général,  $u$  n'est pas  $H^2$  dans  $D_\rho$  et on a le théorème suivant:

**Théorème 2.3.1** *La solution  $u$  s'écrit  $u = u_R + \lambda S$ , avec  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\lambda$  un réel et  $S$  la fonction singulière attachée au coin  $O$ , décrite en coordonnées polaires par:*

$$S(r, \theta) = r^\alpha \sin(\alpha \theta) \eta(r),$$

où  $\eta$  est une fonction de troncature dépendant seulement de  $r$  qui vaut 1 dans  $D_\rho$  et  $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$  l'exposant de singularité.

**Preuve.** cf. [27]. ■

**Proposition 2.3.1** *Dans  $D_\rho$ , un élément  $v \in H^1(\Omega)$  tel que:  $\Delta v = 0$  dans  $D_\rho$  et  $v = 0$  sur  $\partial\Omega \cap \partial D_\rho$ , peut s'écrire sous la forme:*

$$v(r, \theta) = \sum_{k>0} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta), \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega}, \quad (2.3.3)$$

où les  $a_k$  sont des réels.

**Preuve.** Pour  $r$  fixé, d'après [27] on peut considérer la solution  $v(r, \theta)$  comme une fonction de  $\theta$ ,  $v_r(\theta)$  définie sur  $]0, \omega[$ , la fonction  $v_r$  vérifie:  $v_r(0) = v_r(\omega) = 0$ . Elle peut donc être développée en série de Fourier sous la forme:

$$v_r(\theta) = \sum_{k \geq 0} A_{k,r} \sin(k\alpha\theta), \quad 0 < \theta < \omega.$$

Il est clair que cette série converge dans  $L^2(0, \omega)$ , ainsi que sa dérivée.

$\Delta v = 0$  dans  $D_\rho$ , implique que  $A_{k,r}$  est solution de l'équation différentielle:

$$A''_{k,r} + \frac{1}{r} A'_{k,r} - \left(\frac{k\alpha}{r}\right)^2 A_{k,r} = 0,$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$A_{k,r} = a_k r^{k\alpha} + b_k r^{-k\alpha}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent dans  $D_\rho$ ,  $u_r(\theta)$  s'écrit:

$$v_r(\theta) = \sum_{k>0} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) + \sum_{k>0} b_k r^{-k\alpha} \sin(k\alpha\theta).$$

La première série converge dans  $H^1(D_\rho)$  et le fait que  $v$  est dans  $H^1(D_\rho)$  et  $\pi < \omega < 2\pi$  i.e  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  entraîne que  $b_k = 0$  pour tout  $k$ .

Ainsi,

$$v_r(\theta) = \sum_{k>0} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta).$$

D'où le résultat. ■

En électrotechnique, on s'intéresse au cas où  $h_0$  est constante; Sous cette hypothèse nous avons le corollaire suivant:

**Corollaire 2.3.1** *Dans  $D_\rho$ , la solution  $u$  peut s'écrire sous la forme:*

$$u(r, \theta) = h_0 + \sum_{k>0} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta), \quad (2.3.4)$$

où les  $a_k$  sont des réels.

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $v := u - h_0$  vérifie la proposition précédente. ■

**Remarque 2.3.1** *Le coefficient  $\lambda$  est appelé coefficient de singularité. D'après ce qui précède, on doit avoir  $\lambda = a_1$ . En effet: d'après 2.3.4, on a:*

$$u(r, \theta) = a_1 r^\alpha \sin(\alpha\theta) + u_R,$$

avec:  $u_R = h_0 \sum_{k>1} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) \in H^2(\Omega)$ . ■

## 2.3.2 Problème équivalent

Dans la suite nous aurons besoin de transformer le problème (2.2.2) en un problème avec second membre non nul et des données au bord nulles, (cf. **Annexe 1**).

**Lemme 2.3.1** *Il existe  $w \in H^2(\Omega)$  vérifiant les conditions aux limites du problème (2.2.2).*

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $u = \lambda S + u_R$ ,  $u_R \in H^2(\Omega)$  vérifiant les conditions aux limites de (2.2.2). ■

**Remarque 2.3.2** Dans notre cas modèle, quand  $h_0$  ne dépend que de  $y$ , la fonction  $w$  définie par:

$$w(x, y) = \begin{cases} -\frac{(y-a)^2}{(b-a)^2} h_0 + h_0 & \text{si } a \leq y \leq b, -\beta \leq x \leq \beta, \\ h_0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

vérifie le lemme précédent. ■

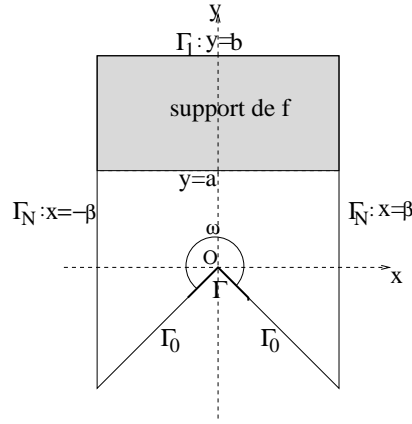


Figure 2.2: L'ouvert  $\Omega$

Définissons la fonction  $f$  de  $L^2(\Omega)$  par:  $f := \Delta w$  et posons  $v = u - w$ , alors  $v \in H^1(\Omega)$  est solution du problème aux limites:

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Le problème (2.3.5) est équivalent au problème (2.2.2) et pour  $h_0$  constante,  $f$  est nulle au voisinage du coin  $O$ .

**Lemme 2.3.2**  $u$  et  $v$  ont le même comportement au voisinage du coin.

**Preuve.** Il existe  $u_R, v_R \in H^2(\Omega)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que:

$$u = \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)\eta + u_R \quad \text{et} \quad v = \mu r^\alpha \sin(\alpha\theta)\eta + v_R,$$

$\eta$  une fonction de troncature qui vaut 1 dans  $D_\rho$ .  
 Posons:  $\phi = w - (u_R - v_R) = \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)\eta - \mu r^\alpha \sin(\alpha\theta)\eta \in H^2(\Omega)$ .  
 Dans  $D_\rho$  on a:

$$\phi = (\lambda - \mu)r^\alpha \sin(\alpha\theta), \quad \text{avec } r^\alpha \sin(\alpha\theta) \notin H^2(D_\rho).$$

On en déduit que  $\lambda = \mu$ . D'où le résultat. ■

### 2.3.3 Etude du coefficient de singularité

Dans cette section, nous proposons deux méthodes pour calculer le coefficient de singularité  $\lambda$  et nous présenterons des tests numériques pour les valider.

#### Méthode 1

Supposons que la solution  $v$  est harmonique au voisinage du coin  $O$ . Soit  $\rho > 0$  telle que  $\Delta v = 0$ , dans  $D_\rho$ . D'après la proposition 2.3.1, la solution  $v$  du problème (2.3.5) s'écrit dans  $D_\rho$  sous la forme:

$$v(r, \theta) = \sum_{k>0} a_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta). \quad (2.3.6)$$

Soit  $r_0$  un réel tel que  $0 < r_0 < \rho$  et  $\bar{\Gamma}$  l'intersection de  $\Omega$  avec l'arc de cercle d'origine  $O$  et de rayon  $r_0$ .

D'après la formule précédente,  $v$  peut s'écrire sur l'arc  $\bar{\Gamma}$  sous la forme:

$$v(r_0, \theta) = \sum_{k>0} a_k r_0^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta), \quad \theta \in ]0, \omega[.$$

Donc

$$v(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) = \lambda r_0^\alpha \sin^2(\alpha\theta) + \sum_{k>1} a_k r_0^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) \sin(\alpha\theta),$$

et

$$\int_0^\omega v(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta = \lambda r_0^\alpha \int_0^\omega \sin^2(\alpha\theta) d\theta + \sum_{k>1} a_k r_0^{k\alpha} \int_0^\omega \sin(k\alpha\theta) \sin(\alpha\theta) d\theta.$$

Comme l'intégrale  $\int_0^\omega \sin(k\alpha\theta) \sin(\alpha\theta) d\theta$  s'annule pour tout  $k > 1$ , il vient que

$$\int_0^\omega v(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta = \lambda r_0^\alpha \int_0^\omega \sin^2(\alpha\theta) d\theta.$$

D'où la proposition suivante:

**Proposition 2.3.2** *Pour tout réel  $r_0$  tel que  $0 < r_0 < \rho$ , on a:*

$$\lambda = \frac{2}{\omega} r_0^{-\alpha} \int_0^\omega v(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta. \quad \blacksquare \quad (2.3.7)$$



## Méthode 2

Cette méthode est basée sur la résolution d'un problème auxiliaire.

- Posons:  $v_1^*(r, \theta) = r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)$  et considérons  $v_2^* \in H^1(\Omega)$  la solution du problème:

$$(P_2^*) \begin{cases} \Delta v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_2^* &= -v_1^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Le problème  $(P_2^*)$  est bien posé et admet une et une seule solution.

- Posons  $v^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_2^*)$ ,  $v^*$  vérifie:

$$\Delta v^* = 0 \text{ dans } \Omega, \quad v^* = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N.$$

On a vu d'après le théorème 1.2.3 que le coefficient de singularité  $\lambda$  est donné par:

$$\lambda = \int_{\Omega} f v^* dx, \quad (2.3.8)$$

avec  $f$  le second membre du problème (2.3.5).

Cette méthode est intéressante, car elle est applicable par tout problème de la forme (2.3.5) et elle ne suppose pas de contraintes sur la géométrie.

## Tests numériques

Soit  $v_h$  une solution approchée de  $v$  par un calcul éléments finis. Notons  $v_{2,h}^*$  une solution approchée de  $v_2^*$  et posons:

$$v_h^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_{2,h}^*), \quad \lambda_h^1 = \frac{2}{\omega} r_0^{-\alpha} \int_0^{\omega} v_h(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \lambda_h^2 = \int_{\Omega} f v_h^* dx. \quad (2.3.9)$$

$\lambda_h^1$  (resp.  $\lambda_h^2$ ) est une valeur approchée de  $\lambda$  par la méthode 1 (resp. la méthode 2).

Pour calculer le coefficient  $\lambda_h^1$ , il faut calculer numériquement l'intégrale  $\int_0^{\omega} v_h(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta$ .

Dans une première étape, on calcule la solution  $v_h$  par éléments finis, après la subdivision de l'arc  $\bar{\Gamma}$  en  $N - 1$  arcs  $\bar{\Gamma}_i$  de longueurs égales,

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_N = \omega, \quad \theta_i = \frac{i-1}{N-1} \omega, \quad i = 1..N,$$

Les points considérés sont choisis comme sommets de la triangulation.

On a alors

$$\int_0^{\omega} v_h(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} v_h(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta.$$

On connaît les valeurs de  $v_h$  aux points  $(r_0, \theta_i)$ , donc on peut appliquer la formule des trapèzes pour calculer cette intégrale, ainsi on a

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} u_h(r_0, \theta) \sin(\alpha\theta) d\theta = \frac{h}{2} \left( v_h(r_0, \theta_i) \sin(\alpha\theta_i) + v_h(r_0, \theta_{i+1}) \sin(\alpha\theta_{i+1}) \right).$$

Par conséquent

$$\lambda_h^1 = \frac{2}{N-1} r_0^{-\alpha} \sum_{i=2}^{N-1} u_{i,h} \sin\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right), \quad (2.3.10)$$

avec  $v_{i,h}$  la valeur de  $v_h$  au point  $(r_0, \theta_i)$ .

Pour le calcul de  $\lambda_h^2$ , on a

$$\lambda_h^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f v_1^* dx + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f v_{2,h}^* dx.$$

Dans des cas particuliers, le premier terme du second membre peut se calculer directement, lorsque la fonction  $f$  est simple (par exemple une fonction polynômiale) et la forme géométrique de  $\Omega$  n'est pas compliquée. Par contre, si le calcul direct du premier terme est très difficile, on peut l'approcher numériquement par l'une des formules d'intégration numérique suivantes,

$$\int_T P(x) dx \approx \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 P(M_k^T), \quad (2.3.11)$$

$$\int_T P(x) dx \approx \frac{\text{aire}(T)}{60} \left( 3 \sum_{k=1}^3 P(S_k^T) + 8 \sum_{k=1}^3 P(M_k^T) + 27 P(G^T) \right). \quad (2.3.12)$$

$S_k^T$ ,  $k = 1, 3$  sont les sommets de  $T$ ,  $M_k^T$ ,  $k = 1, 3$  sont les milieux des côtés et  $G^T$  est le centre de gravité. Remarquons que la formule (2.3.11) intègre exactement les polynômes de degré 2 et la formule (2.3.12) les polynômes de degré 3.

#### • Test de validation:

Nous nous intéressons à tester les deux méthodes, en prenant une fonction dont on connaît la valeur exacte de  $\lambda$ . Considérons la fonction singulière:

$$v(r, \theta) = S(r, \theta) = r^\alpha \sin(\alpha\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \omega,$$

la valeur exacte de  $\lambda$  est 1.

Soient  $g$  et  $k$  deux fonctions telles que:

$$g = S \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } k = \frac{\partial S}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_N,$$

donc  $v$  est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,0}, \\ v = g & \text{sur } \Gamma_{D,1}, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = k & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Pour qu'on puisse utiliser la deuxième méthode, on doit transformer le problème en un problème de second membre non nul.

Pour un réel  $\delta > 0$ , considérons la fonction de troncature  $\eta$  définie par:

$$\eta(r) = 1, \text{ si } 0 < r < \delta \text{ et } \eta(r) = 0, \text{ si } \delta < r < 2\delta.$$

Dans  $D = \{(r, \theta); \delta < r < 2\delta \text{ et } 0 < \theta < \omega\}$ ,  $\eta$  s'écrit:

$$\eta(r) = \frac{1}{\delta^3}(r - 2\delta)(2r^2 - 5\delta r + 2\delta^2). \quad (2.3.13)$$

Posons  $u = v\eta$ , il est clair que:

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_N.$$

Ainsi,  $u$  est solution du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

où  $f$  est la fonction définie par:  $f = -\Delta(S\eta)$ . Un calcul élémentaire nous donne

$$f(r, \theta) = \begin{cases} g(r) \sin(\alpha\theta) & \text{si } \delta < r < 2\delta, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (2.3.14)$$

avec:  $g(r) = -\left(\eta''(r)r + (2\alpha + 1)\eta'(r)\right)r^{\alpha-1}$ .

Le calcul numérique de  $\lambda_h^1$  effectué avec le logiciel **Gfem** a donné les résultats suivants avec  $a = 3$ ,  $b = 4$  et  $\beta = 3$ :

$r_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega = \frac{3}{2}\pi$	0.991	0.997	0.999	0.997	0.997
$\omega = \frac{5}{4}\pi$	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999

Table 2.1: Les valeurs de  $\lambda_h^1$

**Remarque 2.3.3** *Les valeurs de  $\lambda_h^1$  obtenues paraissent peu sensibles au choix de  $r_0$ . ■*

Le calcul numérique de  $\lambda_h^2$  effectué sur **Matlab** a donné les résultats suivants:

$\delta$	0.1	0.2	0.3	0.4
$\omega = \frac{3}{2}\pi$	0.9983	0.9992	0.9920	0.9975
$\omega = \frac{5}{4}\pi$	0.9985	0.9986	0.9873	1.0023

Table 2.2: Les valeurs de  $\lambda_h^2$

$r_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\omega = \frac{3}{2}\pi$	0.3978	0.4071	0.3979	0.4013	0.3944
$\omega = \frac{5}{4}\pi$	0.3763	0.3804	0.3771	0.3791	0.3792

Table 2.3: Les valeurs de  $\lambda_h^1$

- **Le problème modèle:**

Pour  $h_0 = 1$ , un calcul par **Gfem** d'une valeur approchée de  $\lambda$  par les deux méthodes a donné les résultats suivants:

$a = 3$ ,  $b = 4$  et  $\beta = 3$ .

On remarquera que les deux méthodes donnent des résultats tout à fait similaires.

**Remarque 2.3.4** *Le calcul d'une solution approchée de  $u$  n'est pas nécessaire pour faire un calcul de  $\lambda_h^2$ . Ainsi pour un domaine donné  $\Omega$  le calcul de  $\lambda_h^2$  se fait indépendamment de la résolution du problème  $(P_2^*)$ . Par conséquent, pour plusieurs seconds membres  $f$ , le calcul de  $\lambda_h^2$  ne dépend que de  $f$ . Par contre le calcul de  $\lambda_h^1$  demande la connaissance de la solution  $u$  au moins sur l'arc  $\bar{\Gamma}$ . ■*

## Approximation du coefficient de singularité

Nous avons proposé précédemment deux méthodes pour calculer le coefficient  $\lambda$ . Dans le but de comparer les deux méthodes, nous allons étudier la différence entre la solution exacte et la solution approchée. Nous remarquons d'après les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 que l'erreur pour les deux méthodes est de l'ordre  $h^{2\alpha}$ .

**Lemme 2.3.3** *Pour  $\beta > 0$  donné arbitrairement, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $h$  assez petit, on a*

$$|u(r_0, \theta) - u_h(r_0, \theta)| \leq Ch^{2\alpha-\beta}, \quad \forall \theta \in ]0, \omega[.$$

$\omega$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$
$\lambda$	0.4011	0.3799

Table 2.4: Les valeurs de  $\lambda_h^2$

**Preuve.** Rappelons que:  $\bar{\Gamma} = \{(r_0, \theta) / 0 < \theta < \omega\}$ ; considérons un ouvert  $\Omega_0 \subset \Omega$  ne contenant aucun sommet de  $\Omega$  et tel que  $\bar{\Gamma} \subset \Omega_0$  et une fonction de troncature  $\eta$  dépendant seulement de  $r$  qui vaut 1 pour  $r \leq r_0$  et 0 pour  $r > 2r_0$  et définissons la fonction  $v = \eta u$ . La trace de  $v$  sur  $\partial\Omega$  est nulle. Par conséquent, d'après le théorème 4.1 de [52], il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $h$  assez petit

$$\|v - v_h\|_{L_\infty(\Omega_0)} \leq Ch^{2\alpha-\beta},$$

où  $v_h$  est une solution approchée de:  $\Delta v = \Delta(\eta u)$  dans  $\Omega$ ,  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\beta > 0$  un réel arbitrairement petit. Ainsi, pour tout  $0 < \theta < \omega$ :

$$|u(r_0, \theta) - u_h(r_0, \theta)| = |v(r_0, \theta) - v_h(r_0, \theta)| \leq \|v - v_h\|_{L_\infty(\Omega_0)}.$$

D'où le lemme. ■

**Théorème 2.3.2** *Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que*

$$|\lambda^1 - \lambda_h^1| \leq Cr_0^{-\alpha} h^{2\alpha-\beta},$$

*avec  $\beta$  réel positif arbitrairement petit.*

**Preuve.** Il suffit de remarquer que:

$$\lambda^1 - \lambda_h^1 = \frac{2}{\omega} r_0^{-\alpha} \int_0^\omega (u(r_0, \theta) - u_h(r_0, \theta)) d\theta,$$

et d'utiliser ensuite le lemme précédent. ■

**Remarque 2.3.5** *On constate que le choix de  $r_0$  est très important pour avoir une meilleure approximation.* ■

D'après le théorème 1.3.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,\Omega} \leq Ch^{2\alpha}.$$

D'où le théorème suivant:

**Théorème 2.3.3** *Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que*

$$|\lambda^2 - \lambda_h^2| \leq Ch^{2\alpha} \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que

$$\lambda^2 - \lambda_h^2 = \int_{\Omega} f(v^* - v_h^*) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} f(v_2^* - v_{2,h}^*) dx,$$

et d'utiliser ensuite le lemme précédent. ■

## 2.4 Domaine modifié et étude de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi

### 2.4.1 Description du domaine arrondi et problème associé

Le coin  $O$  a un angle  $\omega$  supérieur à  $\pi$ . La présence de cette singularité entraîne des difficultés pour l'approximation numérique de la solution  $u$  du problème  $(P)$ .

L'idée pour enlever cette singularité est d'arrondir cet angle et de remplacer la courbe  $\Gamma$  par une courbe régulière  $\Gamma_{\epsilon}$  de telle sorte que " $\Gamma_{\epsilon}$  tend vers  $\Gamma$ " quand  $\epsilon$  tend vers zéro.

Notons  $\Omega_{\epsilon}$  ce nouveau domaine et  $\partial\Omega_{\epsilon}$  sa frontière (voir la figure suivante), où:

$$\partial\Omega_{\epsilon} = \Gamma_{D,\epsilon} \cup \Gamma_N \text{ avec } \Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_{D,0,\epsilon} \cup \Gamma_{D,1} \text{ et } \Gamma_{D,0,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\epsilon}.$$

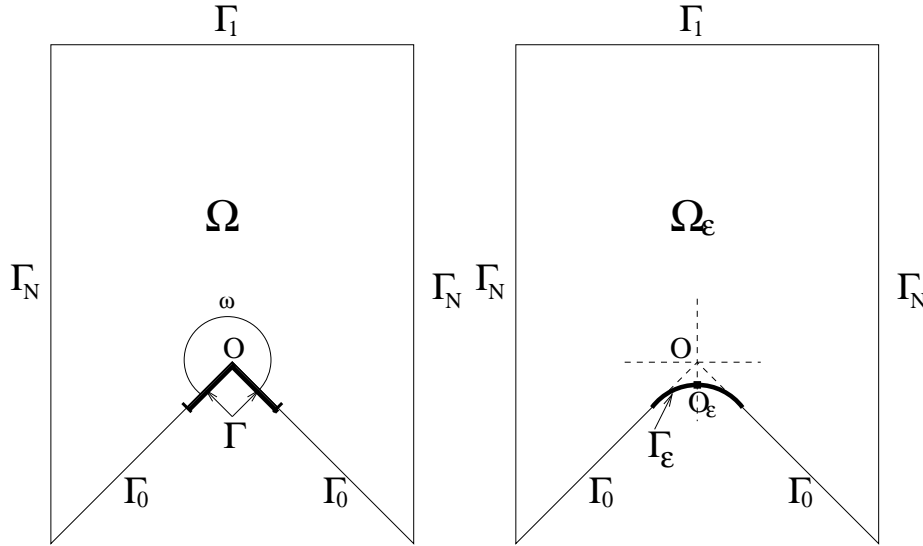


Figure 2.3: Le polygone  $\Omega$  et son arrondi

Notons  $(P_{\epsilon})$  le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta v_{\epsilon} &= \tilde{f} \text{ dans } \Omega_{\epsilon}, \\ v_{\epsilon} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_{\epsilon}}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

avec  $\tilde{f}$  le prolongement du second membre  $f$  du problème (2.3.5) par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

Notons aussi  $O_\epsilon = (0, y^*)$  le milieu de l'arrondi  $\Gamma_\epsilon$  et remarquons que  $y^* = y^*(\epsilon)$  dépend essentiellement de  $\Gamma_\epsilon$ .

## 2.4.2 Expression explicite de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi

Dans cette section nous donnons une expression de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  à l'aide d'une technique de potentiel.

Commençons tout d'abord par introduire les données nécessaires pour la suite. Considérons la fonction  $v_1^*$  définie par:

$$v_1^*(x, y) = \frac{y - y^*}{x^2 + (y - y^*)^2},$$

Notons que  $-\Delta v_1^* = 0$  dans  $\Omega_\epsilon$  et considérons les fonctions  $g$  et  $k$  définies par:

$$g = -v_1^* \quad \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \quad k = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (2.4.15)$$

La forme géométrique de la courbe arrondie  $\Gamma_\epsilon$  que nous avons choisie est une parabole d'équation:

$$y = \varphi(x) = \frac{c_\omega}{\epsilon} x^2 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{avec } c_\omega = \frac{-1}{2 \tan^2(\frac{\omega}{2})} \quad \text{pour } -\tan(\omega/2)\epsilon < x < \tan(\omega/2)\epsilon.$$

Dans ce cas  $y^* = -\frac{\epsilon}{2}$ .

Définissons la fonction  $\psi$  sur  $] -\tan(\omega/2)\epsilon, \tan(\omega/2)\epsilon[$  par:

$$\psi(x) = -v_1^*(x, \varphi(x)) = \frac{c_\omega \epsilon}{c_\omega^2 x^2 + \epsilon^2}$$

**Proposition 2.4.1** *Les fonctions  $g$  et  $k$  définies par (2.4.15) sont respectivement dans  $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , et on a:*

$$1. \quad \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_\epsilon} = O(1/\epsilon).$$

$$2. \quad \|g\|_{\frac{3}{2}, \Gamma_\epsilon} = O(1/\epsilon^2).$$

**Preuve.** Il est clair que  $g$  et  $k$  sont bien définies loin de la singularité et que  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma_\epsilon)$  et  $h \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma_\epsilon)$ . Il reste à étudier  $g$  sur  $\Gamma_\epsilon$ . Les dérivées première et seconde de  $\varphi$  sont données par:

$$\varphi'(x) = \frac{2c_\omega}{\epsilon} x, \quad \varphi''(x) = \frac{2c_\omega}{\epsilon}.$$

Calculons  $||\psi||_{0,]-\epsilon,\epsilon[}$ , on a

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{c_{\omega}^2 \epsilon^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + \epsilon^2)^2} dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-1}^1 \frac{c_{\omega}^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + 1)^2} dx,$$

donc

$$||\psi||_{0,]-\epsilon,\epsilon[} = O\left(\frac{1}{\epsilon^{1/2}}\right). \quad (2.4.16)$$

Calculons  $||\psi||_{1,]-\epsilon,\epsilon[}$ , on a :

$$\psi'(x) = \frac{-2c_{\omega}^3 \epsilon x}{(c_{\omega}^2 x^2 + \epsilon^2)^2},$$

donc

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{4c_{\omega}^6 \epsilon^2 x^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + \epsilon^2)^4} dx = \frac{1}{\epsilon^3} \int_{-1}^1 \frac{4c_{\omega}^6 x^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + 1)^4} dx,$$

par suite

$$||\psi||_{1,]-\epsilon,\epsilon[} = O\left(\frac{1}{\epsilon^{3/2}}\right), \quad (2.4.17)$$

par conséquent, on conclut que:

$$||\psi||_{\frac{1}{2},]-\epsilon,\epsilon[}^2 = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right).$$

Calculons  $||\psi||_{2,]-\epsilon,\epsilon[}$ , on a :

$$\psi''(x) = \frac{6c_{\omega}^5 \epsilon x^2 - 2c_{\omega}^3 \epsilon^3}{(c_{\omega}^2 x^2 + \epsilon^2)^3},$$

donc

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |\psi''(x)|^2 dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(6c_{\omega}^5 \epsilon x^2 - 2c_{\omega}^3 \epsilon^3)^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + \epsilon^2)^6} dx = \frac{1}{\epsilon^5} \int_{-1}^1 \frac{(6c_{\omega}^5 x^2 - 2c_{\omega}^3)^2}{(c_{\omega}^2 x^2 + 1)^6} dx,$$

par suite

$$||\psi||_{2,]-\epsilon,\epsilon[} = O\left(\frac{1}{\epsilon^{5/2}}\right).$$

Et on conclut que:

$$||\psi||_{\frac{3}{2},]-\epsilon,\epsilon[}^2 = O\left(\frac{1}{\epsilon^4}\right).$$

D'où la proposition. ■

**Proposition 2.4.2** *On a*

1.  $||g||_{0,\partial\Omega} = O(1/\epsilon^{1/2})$ .
2.  $||k||_{0,\partial\Omega} = O(1/\epsilon^{3/2})$ .



**Preuve.** Il est facile de prouver d'après la méthode utilisée dans la démonstration de la proposition précédente que:

$$\|g\|_{0,\partial\Omega\setminus\Gamma_\epsilon} = O(1/\epsilon^{1/2}) \quad \text{et} \quad \|k\|_{0,\partial\Omega\setminus\Gamma_\epsilon} = O(1/\epsilon^{3/2}),$$

et que d'après (2.4.16) et (2.4.17), on a:

$$\|g\|_{0,\Gamma_\epsilon} = O(1/\sqrt{\epsilon}) \quad \text{et} \quad \|k\|_{0,\Gamma_\epsilon} = O(1/\epsilon^{3/2}).$$

■

Soit  $v_2^*$  la solution du problème aux limites suivant:

$$(P_\epsilon^*) \begin{cases} \Delta v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_2^* &= g & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= k & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

D'après la proposition précédente, la solution  $v_2^*$  est bien définie dans l'espace  $H^1(\Omega_\epsilon)$ , de plus elle est unique.

**Proposition 2.4.3** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que:*

$$\|v_2^*\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq \frac{C}{\epsilon}. \quad (2.4.18)$$

**Preuve.** D'après la formule de Green, on a:

$$\|\nabla v_2^*\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial v_2^*}{\partial n} v_2^* d\Gamma.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Scharwz, on déduit que:

$$\|\nabla v_2^*\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 \leq \|k\|_{0,\partial\Omega_\epsilon} \|g\|_{0,\partial\Omega_\epsilon}.$$

En utilisant la proposition 2.4.2, la proposition est démontrée. ■

Enfin, posons  $v^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_2^*)$ , la fonction  $v^*$  est harmonique et elle vérifie:

$$v^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

**Théorème 2.4.1** *La solution  $v_\epsilon$  du problème  $(P_\epsilon)$  vérifie la relation suivante:*

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* dx.$$

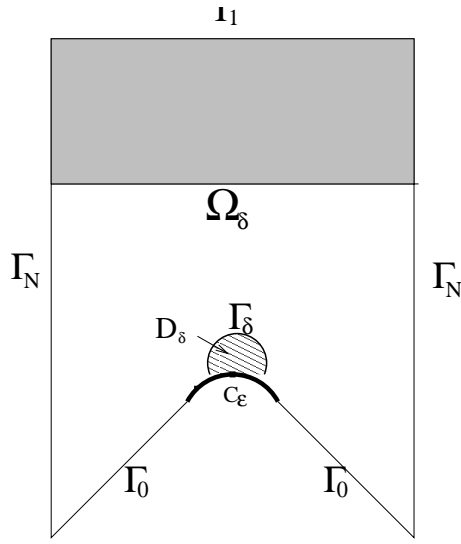


Figure 2.4: Le domaine  $\Omega_\delta$

**Preuve.** Considérons les coordonnées polaires centrées à l'origine  $O$  et le domaine,

$$\Omega_\delta = \{(r, \theta) \mid r > \delta\} \cap \Omega,$$

et notons  $\partial\Omega_\delta$  sa frontière et  $\Gamma_\delta = \{(r, \theta) \in \Omega \mid r = \delta\}$ , cf. Figure 2.3.

Puisque  $v_\epsilon$  est dans  $H^2(\Omega_\epsilon)$ , on a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} \tilde{f} v^* \, dx \, dy &= - \int_{\Omega_\delta} \Delta v_\epsilon v^* \, dx \, dy = - \int_{\partial\Omega_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v^* - v_\epsilon \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v^* - v_\epsilon \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) d\Gamma \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_1^* - v_\epsilon \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_2^* - v_\epsilon \frac{\partial v_2^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right), \end{aligned}$$

$v_\epsilon$  et  $v_2^*$  étant dans  $H^1(\Omega_\delta)$ , le second membre du terme de droite tend vers zéro avec  $\delta$ , donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} \tilde{f} v^* \, dx \, dy = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_1^* - v_\epsilon \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (2.4.19)$$

Sur  $\Gamma_\delta$ , on a:

$$v_\epsilon(x, y) = v_\epsilon(O_\epsilon) + x \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x}(O_\epsilon) + (y - y_0) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial y}(O_\epsilon) + 0(d^2),$$

avec  $\delta$  la distance entre le point  $O_\epsilon$  et le point de coordonnées  $x$  et  $y$ .

Comme  $x = \delta \cos(\theta)$ ,  $y - y_0 = \delta \sin(\theta)$ ,  $u_\epsilon(O_\epsilon) = 0$ , on a

$$v_\epsilon(x, y) = \delta \sin(\theta) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) + 0(\delta^2),$$

De même, on aura

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(x, y) = -\frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(x, y) = -\frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(O_\epsilon) + 0(\delta) = -\sin(\theta) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) + 0(\delta),$$

comme

$$v_1^*(x, y) = \frac{\sin(\theta)}{\delta}, \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial n}(x, y) = -\frac{\partial v_1^*}{\partial r}(x, y) = \frac{\sin(\theta)}{\delta^2},$$

donc, en remplaçant dans ( 2.4.19), on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} \tilde{f} v^* dx dy = \frac{2}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\omega_\delta} \sin^2(\theta) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) d\theta + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\omega_\delta} \text{autres termes } dx,$$

avec  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\delta = \pi$  et la deuxième intégrale du second membre tend vers zéro quand  $\delta$  tend vers zéro.

Par conséquent

$$\int_{\Omega} f v^* dx dy = \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{f} v^* dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta \right) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon).$$

■

Dans la suite, nous nous intéressons à l'étude numérique du comportement de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$  et de l'exposant de singularité  $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$ , en utilisant son expression explicite établie par le théorème précédent.

### 2.4.3 Expression approchée par une approche éléments finis

Le calcul se fait en deux étapes.

Rappelons d'abord l'expression de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  donnée par le théorème 2.4.1,

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* dx.$$

- **Étape 1:** On calcule par éléments finis une solution approchée  $v_{2,h}^*$  du problème

$$(P_\epsilon^*) \begin{cases} \Delta v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_2^* &= g & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= k & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

où les fonctions  $g$  et  $k$  sont données par ( 2.4.15).

- **Étape 2:** Les fonctions  $f$  et  $v_h^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_{2,h}^*)$  sont connues. On peut donc calculer une valeur approchée de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$ , en utilisant la formule d'intégration numérique suivante:

$$\int_T p dx = \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{i=1}^{i=3} p(m_i^T), \quad p \in P_2,$$

avec  $m_i^T$ ,  $i = 1, 3$  les milieux des côtés du triangle  $T$ .

**Remarque 2.4.1** 1. Le calcul de  $v_\epsilon$  n'est pas nécessaire pour faire un calcul de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$ .

2. Le calcul de  $v_2^*$  se fait indépendamment de la résolution de problème  $(P_\epsilon)$ . Par conséquent, pour plusieurs second membres  $f$ , le calcul de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  ne dépend que de  $f$ . ■

#### 2.4.4 Estimation d'erreur

Posons:

$$\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h = \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{f} v_h^* dx = \int_{\Omega} f v_h^* dx, \quad \text{avec } v_h^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_{2,h}^*).$$

**Lemme 2.4.1** Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que:

$$\|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,\Omega_\epsilon} \leq Ch^2 \epsilon^{-2}. \quad (2.4.20)$$

**Preuve.** On sait que

$$\|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,\Omega_\epsilon} \leq Ch^2 |v_2^*|_{2,\Omega_\epsilon}.$$

Or

$$|v_2^*|_{2,\Omega_\epsilon} \leq c \|v_2^*\|_{3/2,\partial\Omega_\epsilon} \quad \text{et} \quad \|v_2^*\|_{3/2,\partial\Omega_\epsilon} = 0(\epsilon^{-2}), \quad \text{d'après la proposition 2.4.1}$$

d'où le résultat. ■

**Proposition 2.4.4** Il existe une constante  $C$  strictement positive indépendante de  $h$  et de  $\epsilon$  telle que:

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h \right| \leq Ch^2 \epsilon^{-2} \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h \right| &= \left| \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{f}(v_2^* - v_{2,h}^*) dx \right| \\ &\leq \|\tilde{f}\|_{0,\Omega_\epsilon} \|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,\Omega_\epsilon} = \|f\|_{0,\Omega} \|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,\Omega_\epsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent. ■

**Remarque 2.4.2** Si  $\epsilon = h$ , alors l'estimation précédente devient:

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h \right| \leq C \|f\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare$$

Cette inégalité montre bien que lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, les deux termes  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  et  $\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h$  divergent vers l'infini de la même façon, puisque leur différence est bornée. ■

### 2.4.5 Tests numériques

Nous rappelons que (cf. Figure 2.5):

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial\Omega; \ y = b\} \text{ et } \Gamma_N = \{(x, y) \in \partial\Omega; \ x = \pm\beta\}.$$

Soit  $a$  un réel tel que  $0 < a < b$ .

Pour tous les tests numériques, nous considérons les dimensions de la géométrie suivantes:

$a = 2$ ,  $b = 3$  et  $\beta = 3$ .

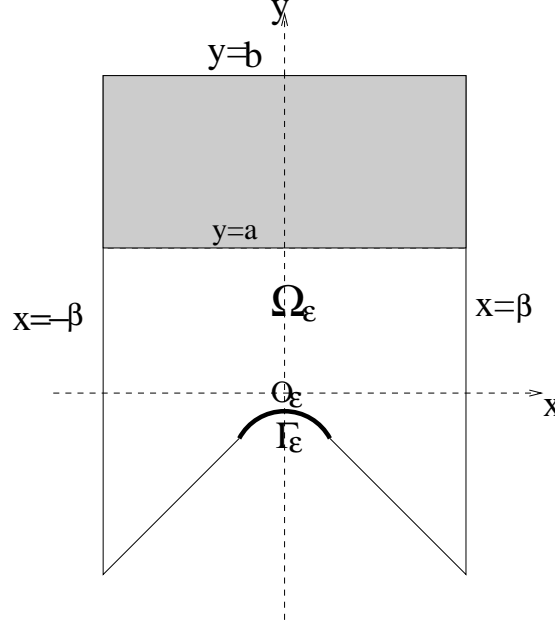


Figure 2.5: Le domaine  $\Omega_\epsilon$

#### Test de validation

Considérons la fonction  $u$  définie sur  $\Omega$  par:

$$v(x, y) = \begin{cases} -(y - a)^2(y - b) & a \leq y \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a

$$f = -\Delta v = \begin{cases} 6y - 4a - 2b & a \leq y \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

De plus, les traces de  $v$  et sa dérivée normale s'annulent respectivement sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ .

Ainsi,  $v$  est l'unique solution du problème  $(P)$ .

Notons  $v_\epsilon$  le prolongement de  $v$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ ,  $v_\epsilon$  donc est l'unique solution de  $(P_\epsilon)$  dans  $\Omega_\epsilon$ .

Nous avons effectué des tests numériques pour  $\omega = \frac{3}{2}\pi$  et  $\omega = \frac{5}{4}\pi$  et nous avons obtenu les résultats suivants ( $h = 0.2$ ):

$\delta$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$\omega = \frac{3}{2}\pi$	0.0009	0.0019	0.0029	0.0039	0.0048
$\omega = \frac{5}{4}\pi$	-0.0031	-0.0014	0.0000	0.0013	0.0025

Table 2.5: La valeur de  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$

On remarque que:

$$\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h \approx 0 = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon).$$

### Le problème modèle

Nous faisons deux tests différents.

Définissons les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  de  $L^2(\Omega)$  par:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2} & \text{si } a \leq y \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2}(6y-4b) & \text{si } a \leq y \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

Notons  $v_\epsilon^1$  (resp.  $v_\epsilon^2$ ) la solution du problème  $(P_\epsilon)$  avec le second membre  $\tilde{f}_1$  (resp.  $\tilde{f}_2$ ), où  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  sont les prolongements respectifs de  $f_1$  et  $f_2$  à  $\Omega_\epsilon$  par zéro.

**Remarque 2.4.3** *Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont associées respectivement aux fonctions  $h_0 := 1$  et  $h_0 := y$ , où  $h_0$  est une fonction donnée sur  $\Gamma_0$ , (cf. Annexe 1). ■*

Notons aussi:

$$c(\epsilon) = \epsilon^{\alpha-1}, \quad c_h^i(\epsilon) = \left| \left( \frac{\partial v_\epsilon^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right|, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad d_h^i(\epsilon) = \frac{c_h^i(\epsilon)}{c(\epsilon)}, \quad \text{avec } \alpha = \frac{\pi}{\omega}.$$

Ainsi

$$\left| \left( \frac{\partial v_\epsilon^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| = d_h^i(\epsilon) \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2. \quad (2.4.21)$$

On souhaite dans la suite caractériser le rapport  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ .

Pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$ , on calcule une valeur approchée de  $d_h^i(\epsilon)$ ,  $i = 1, 2$  et on trace la courbe qui présente la variation de ces valeurs en fonction de  $\epsilon$ .

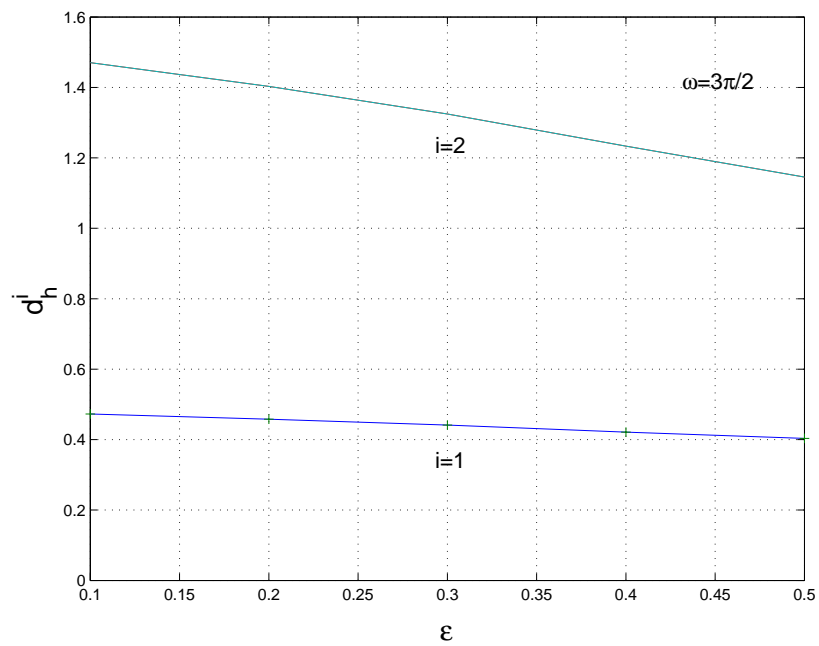


Figure 2.6:  $\epsilon \in [0.1, 0.5]$

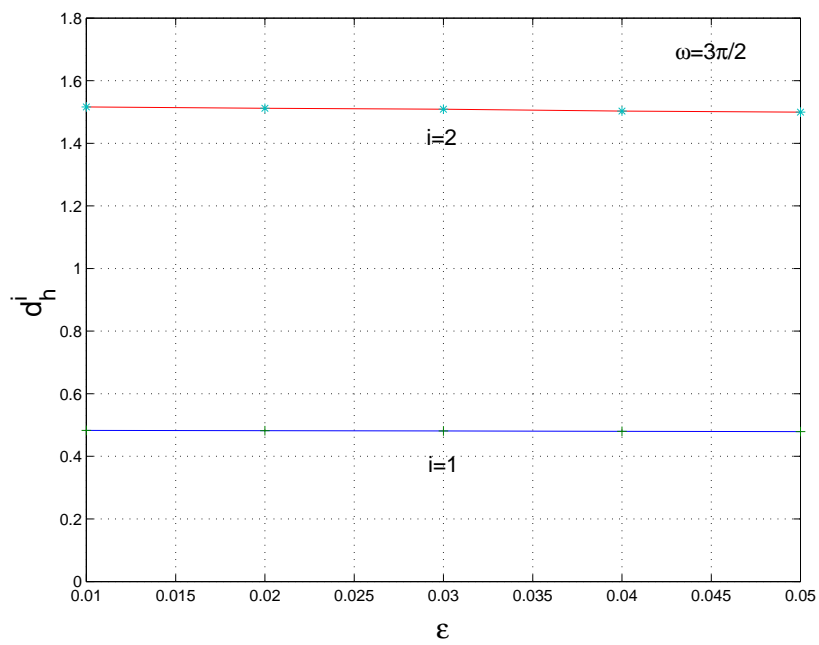


Figure 2.7:  $\epsilon \in [0.01, 0.05]$

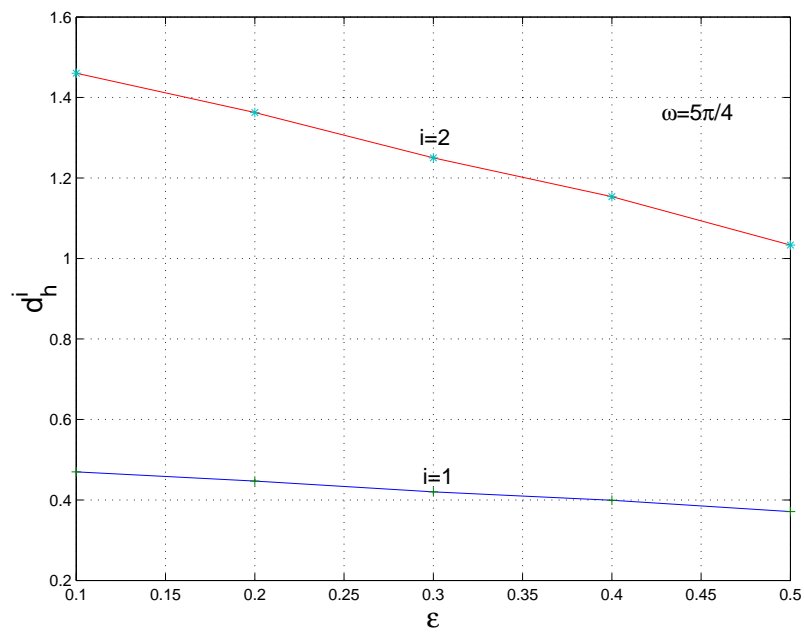


Figure 2.8:  $\epsilon \in [0.1, 0.5]$

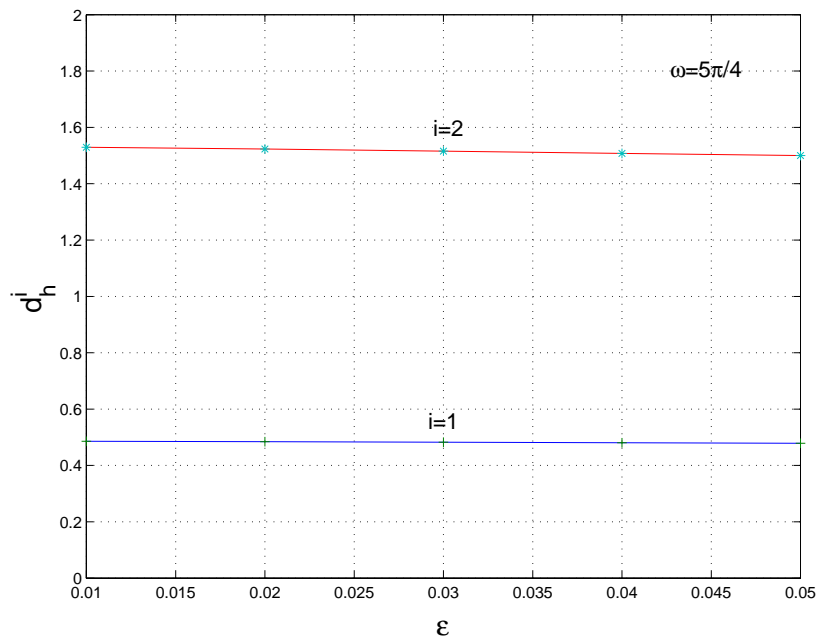


Figure 2.9:  $\epsilon \in [0.01, 0.05]$



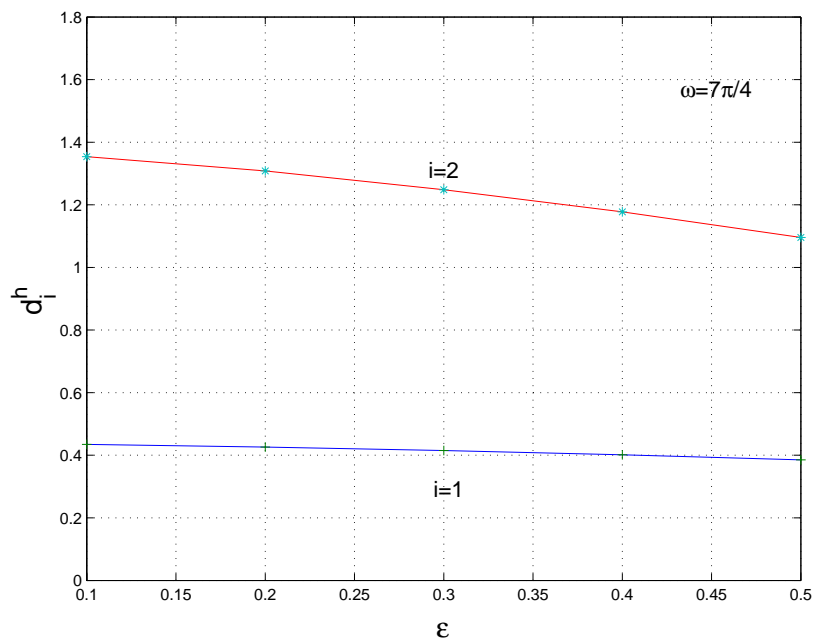


Figure 2.10:  $\epsilon \in [0.1, 0.5]$

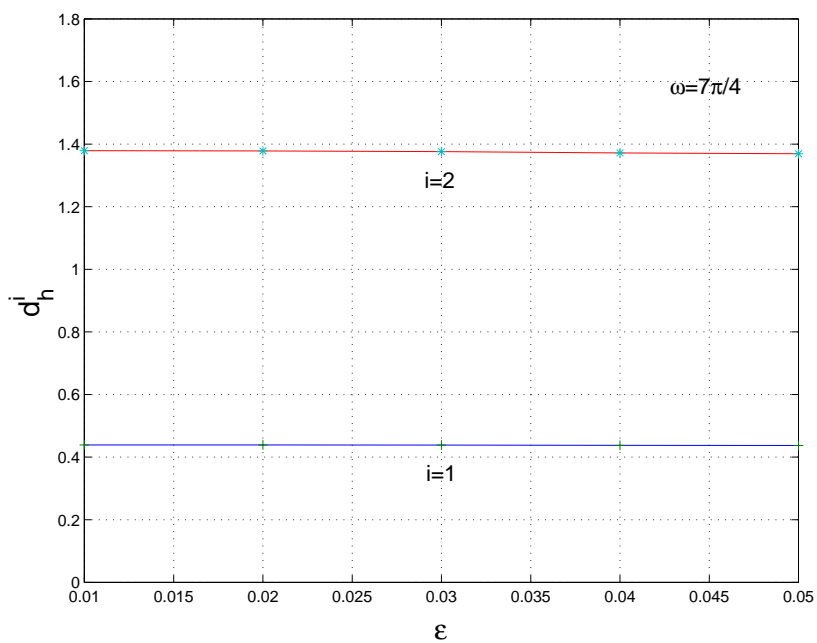


Figure 2.11:  $\epsilon \in [0.01, 0.05]$

**Analyse des figures:** Les figures 1.6 à 1.11 représentent la variation de  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ .

On note bien que pour  $\epsilon < 0.05$ ,  $d_h^i$  est constante.

**Conclusion:**

Lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro, il existe une constante  $d_i > 0$  telle que:

$$\left| \left( \frac{\partial v_\epsilon^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \approx d_i \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2. \quad (2.4.22)$$

**Etude de la constante  $d$**  Pour compléter la vérification numérique, on effectue d'autres tests pour plusieurs angles et plusieurs seconds membres.

Considérons les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  associées respectivement aux fonctions  $h_0 := 1$ ,  $h_0 := y$ ,  $h_0 := y^2$  et  $h_0 := y^3$  et notons  $v_\epsilon^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  les solutions associées du problème  $(P_\epsilon)$ .

Les tests effectués donnent les résultats suivants:

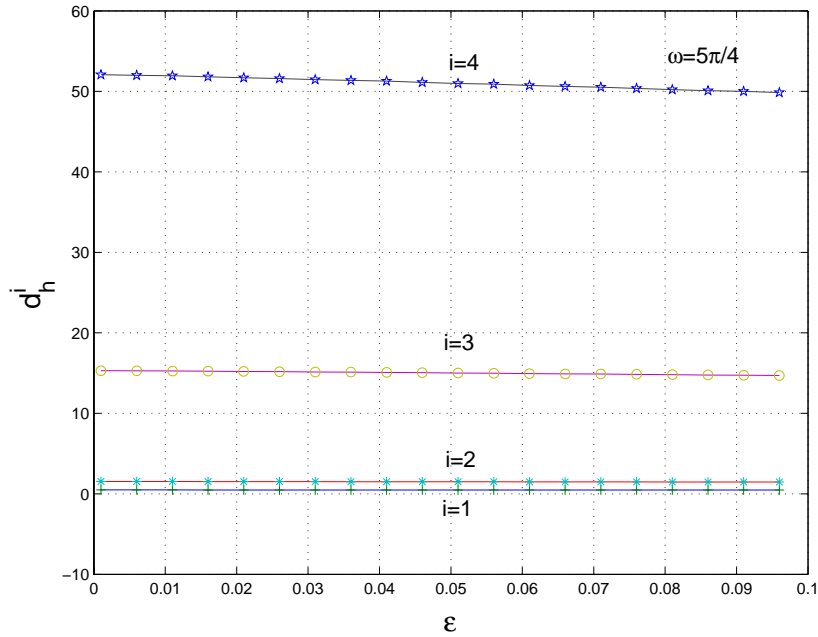


Figure 2.12:  $\omega = \frac{5}{4}\pi$

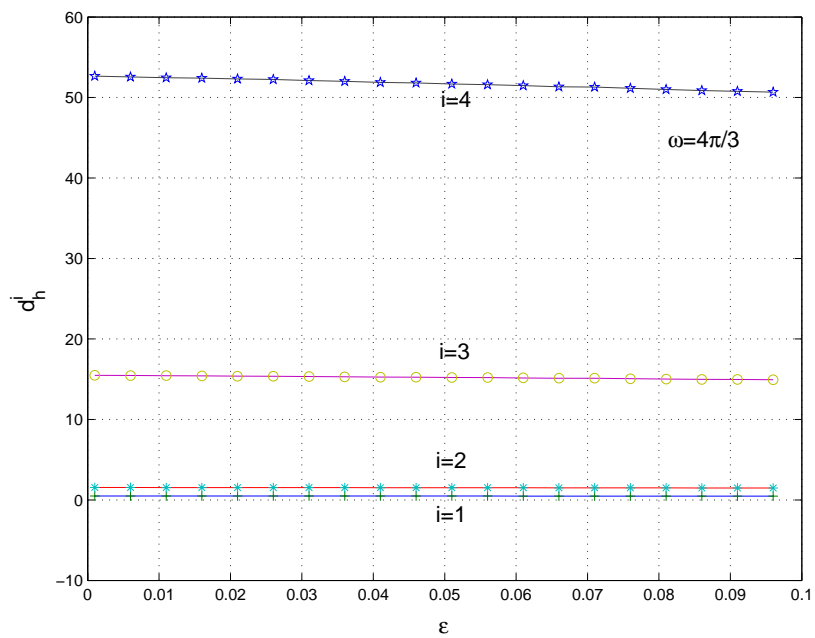


Figure 2.13:  $\omega = \frac{4}{3}\pi$

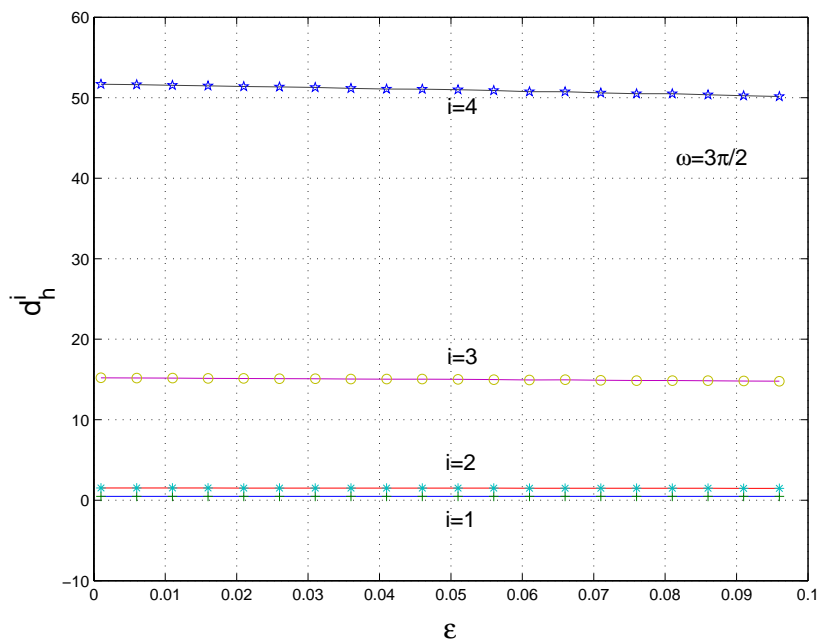


Figure 2.14:  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

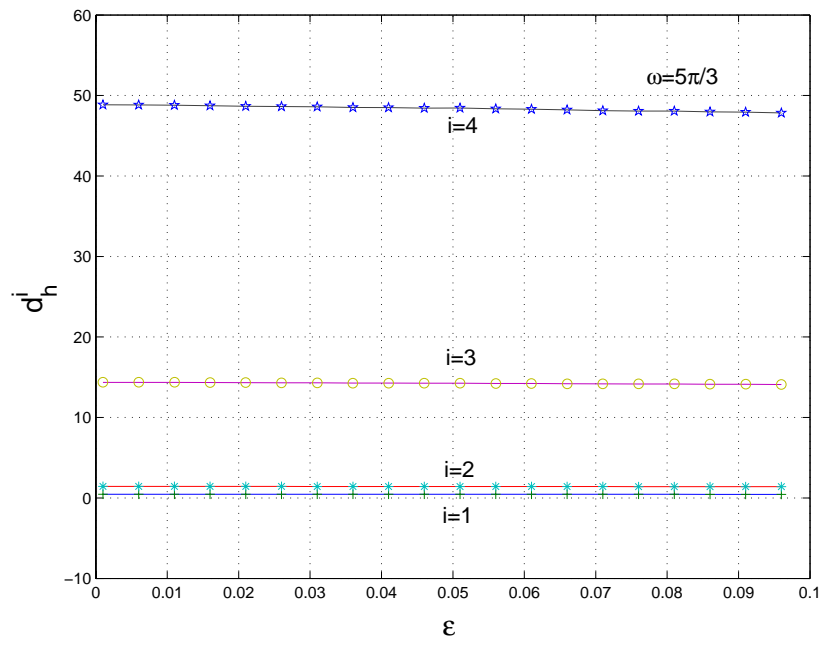


Figure 2.15:  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

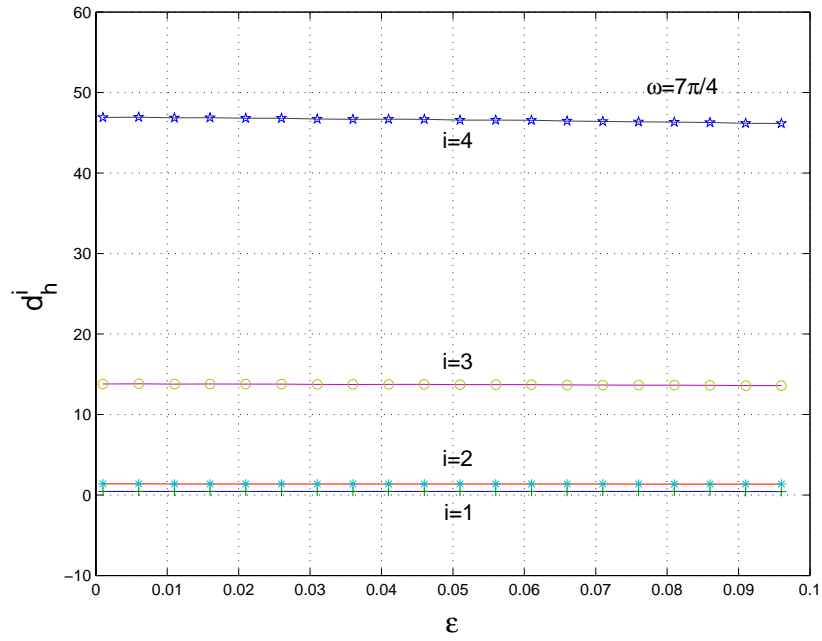


Figure 2.16:  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

$h_0$	1	$y$	$y^2$	$y^3$
$\lambda$	0.387	1.158	3.885	13.116
$d$	0.493	1.549	15.487	52.658
$d/(\alpha\lambda)$	1.699	1.782	5.310	5.728

Table 2.6: Le cas  $\omega = \frac{4}{3}\pi$

$h_0$	1	$y$	$y^2$	$y^3$
$\lambda$	0.401	1.198	3.985	13.535
$d$	0.483	1.520	15.198	51.673
$d/(\alpha\lambda)$	1.809	1.903	5.728	5.728

Table 2.7: Le cas  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

$h_0$	1	$y$	$y^2$	$y^3$
$\lambda$	0.401	1.200	4.008	13.634
$d$	0.457	1.436	14.365	48.843
$d/(\alpha\lambda)$	1.899	1.995	5.973	5.972

Table 2.8: Le cas  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

On a espéré trouver, pour un angle donné, que le rapport  $d/(\alpha\lambda)$  est constant, mais ce n'est pas le cas, d'après les tables ci-dessus. Par contre, on constate la dépendance suivante pour  $d$ :

$$d(\alpha, h_0) = KF(\alpha)G(h_0), \quad (2.4.23)$$

avec:

- $K$  une constante qu'on précisera,
- $F$  une fonction dépendant seulement de  $\alpha$ ,
- $G$  une fonction dépendant seulement de  $h_0$ .

$h_0$	1	$y$	$y^2$	$y^3$
$\lambda$	0.401	1.213	4.050	13.841
$d$	0.439	1.379	13.797	46.912
$d/(\alpha\lambda)$	1.913	1.989	5.962	5.931

Table 2.9: Le cas  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

En effet:

D'après la table 2.9, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(4/7, h_0)$  est une constante indépendante de  $h_0$ , il dépend donc seulement de  $\alpha$ , notons ce rapport  $F(\alpha)$ . De même, d'après la table 2.10, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(\alpha, 1)$  est une constante indépendante de  $\alpha$ , il dépend seulement donc de  $h_0$ , notons ce rapport  $G(h_0)$ . Ainsi

$$d(\alpha, h_0) = F(\alpha)d(4/7, h_0) = F(\alpha)G(h_0)d(4/7, 1).$$

Donc,  $K$  est la constante  $d(4/7, 1)$ .

**Remarque 2.4.4** On a:

- $F(4/7) = 1$  et  $G(1) = 1$ . ■

$h_0$	1	$y$	$y^2$	$y^3$
$d(2/3, h_0)/d(4/7, h_0)$	1.10	1.10	1.10	1.10
$d(3/5, h_0)/d(4/7, h_0)$	1.04	1.04	1.04	1.04
$d(3/4, h_0)/d(4/7, h_0)$	1.12	1.12	1.12	1.12

Table 2.10:

$\omega$	$3\pi/2$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$7\pi/4$
$d(\alpha, y)/d(\alpha, 1)$	3.14	3.14	3.14	3.14
$d(\alpha, y^2)/d(\alpha, 1)$	31.46	31.41	31.43	31.42
$d(\alpha, y^3)/d(\alpha, 1)$	106.98	106.81	106.87	106.86

Table 2.11:

### Conclusion:

Le champ électrique au milieu de l'arrondi dépend de quatre paramètres:

1. Le rayon de courbure  $\epsilon$  de l'arrondi.
2. L'exposant de singularité  $\alpha = \pi/\omega$ .
3. Le coefficient de singularité  $\lambda$ .
4. Une constante qui dépend de  $h_0$ . ■

### 2.4.6 Application en électrotechnique

En électrostatique, ces résultats peuvent être appliqués de la manière suivante:

- Sans faire de calcul dans les domaines arrondis, on souhaite connaître le comportement du champ électrique au milieu de l'arrondi. Ceci est possible en procédant comme suit:

Pour un rayon de courbure donné  $\epsilon_0$ , on calcule le champ électrique au milieu de l'arrondi  $\Gamma_{\epsilon_0}$ . Or on a prouvé que:

$$\frac{\partial u_{\epsilon_0}}{\partial n}(O_{\epsilon_0}) \approx C_0 \epsilon_0^{\alpha-1}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega}.$$

Ceci permet d'évaluer la constante  $C_0$ .

Par conséquent pour tout rayon de courbure  $\epsilon$ :  $0 < \epsilon < \epsilon_{max}$  : rayon de courbure maximal, le champ électrique au milieu de l'arrondi  $\Gamma_\epsilon$  est donné par:

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \approx C_0 \epsilon^{\alpha-1}.$$

- On cherche le rayon de courbure minimal pour lequel le module du champ électrique  $E$  ne dépasse pas une valeur critique  $E_{max}$ .

En effet si on souhaite que:

$$E = \frac{\partial u_{\epsilon_0}}{\partial n}(O_{\epsilon_0}) \leq E_{max},$$

cela revient à imposer  $C_0 \epsilon^{\alpha-1} \leq E_{max}$ , ce qui implique que le rayon de courbure  $\epsilon$  doit vérifier

$$\epsilon \geq \left( \frac{C_0}{E_{max}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.4.24)$$



## Partie II

### Le problème électrostatique dans une géométrie axisymétrique avec singularités



# Chapitre 3

## Position du problème.

### 3.1 Géométrie axisymétrique avec singularités

Nous considérons dans cette partie trois types de géométrie.

Soient  $(Oz)$  un axe vertical,  $\Omega$  un polygone plan, de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et  $\mathbf{\Omega}$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , obtenu par la rotation de  $\Omega$  autour de l'axe  $(Oz)$ , de bord  $\partial\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Gamma}_D \cup \mathbf{\Gamma}_N$ , avec

$$\mathbf{\Gamma}_D = \Gamma_D \times [0, 2\pi[ \text{ et } \mathbf{\Gamma}_N = \Gamma_N \times [0, 2\pi[.$$

Les coordonnées naturellement adaptées à ce type de domaine sont les coordonnées cylindriques, notées  $(r, \theta, z)$ . On peut alors écrire l'égalité

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \times [0, 2\pi[ = \{(r, \theta, z) : (r, z) \in \Omega, \theta \in [0, 2\pi[ \}. \quad (3.1.1)$$

Les coordonnées naturelles dans  $\Omega$  sont donc les coordonnées cartésiennes  $(r, z)$ .

Les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  sont données par:

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad z = r \cos(\theta)$$

#### 3.1.1 Singularité de type conique

Nous notons

$$\Gamma_D = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_N = \Gamma_N^0 \cup \Gamma_N^+, \quad \partial\Omega \cap (Oz) = \Gamma_N^0 \text{ et } \Gamma \cap \Gamma_N^0 = \{O\}, \quad (3.1.2)$$

tel que décrit par la figure 3.1.

Nous notons  $\omega = \pi/\beta$  l'ouverture du coin  $O$  et nous supposons que  $1 < \beta < 2$ .

Au voisinage de  $O$ ,  $\mathbf{\Omega}$  est de la forme d'un cône et la géométrie présente une singularité conique.

#### 3.1.2 Singularité de type arête

On distingue deux cas de géométrie.

Nous notons

$$\Gamma_D = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma \cap (Or) = \{C\} \text{ et } \Gamma_1 = \{(r, z) \text{ tel que } r = r_1\} \quad (3.1.3)$$

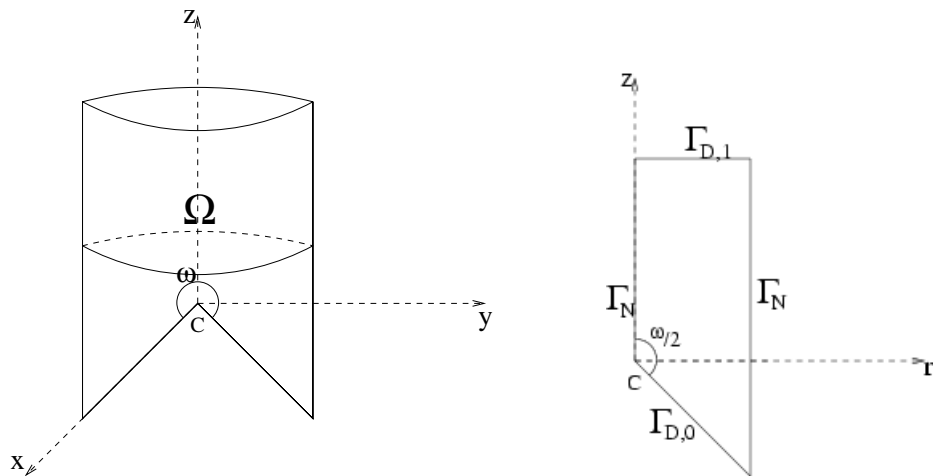


Figure 3.1: Singularité conique

tel que décrit par les figures 3.2 et 3.3. Nous notons aussi  $r_0$  l'abscisse du point  $(C)$  dans le repère  $(O, Or, Oz)$ .

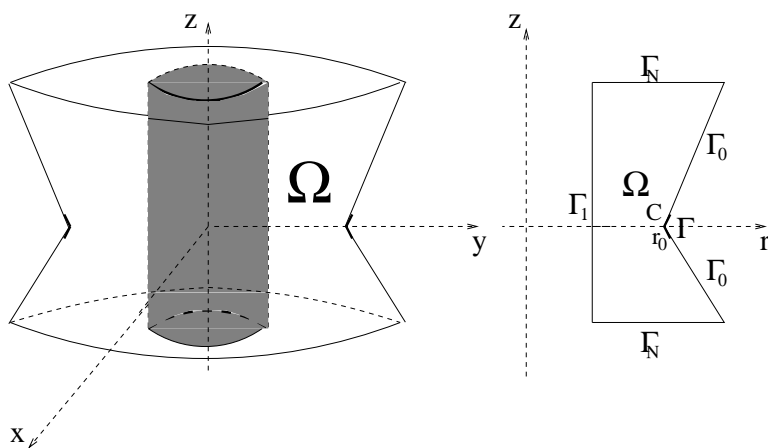


Figure 3.2: Singularité d'arête: cas 1

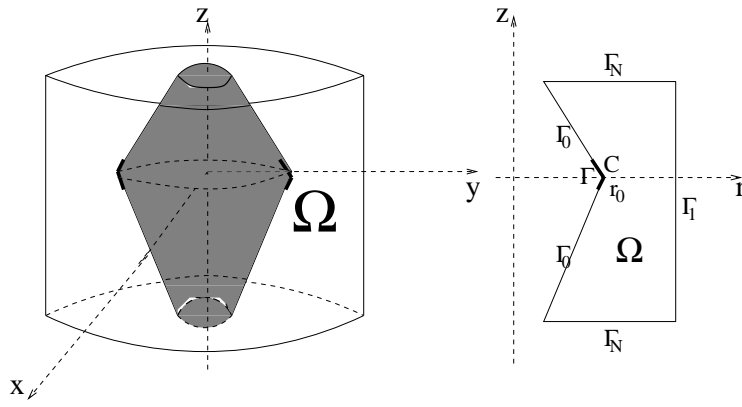


Figure 3.3: Singularité d'arête: cas 2

- 1<sup>er</sup> cas:  $r_0 > r_1$ ,
- 2<sup>ème</sup> cas:  $r_0 < r_1$ .

Nous notons  $\omega$  l'ouverture du coin  $C$  et nous supposons que  $\pi < \omega < 2\pi$ .

Soit  $\Omega$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , obtenu par la rotation de  $\Omega$  autour de l'axe  $(Oz)$ . La géométrie présente une singularité d'arête.

## 3.2 Position du problème

Soit  $h_0 \in H^{3/2}(\Gamma \cup \Gamma_0)$  une fonction donnée. On s'intéressera dans la suite au comportement de la solution  $u$  du problème aux limites:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire à  $\Gamma_N$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

## 3.3 Réduction à un problème dégénéré en dimension deux

Le problème (3.2.4) étant à géométrie axisymétrique, nous allons le reformuler en coordonnées cylindriques. On se ramène grâce à ce changement de variables, à l'étude d'un problème bidimensionnel.

Notons  $(P)$  le problème bidimensionnel déduit de (3.2.4) et  $u$  son unique solution.

**Remarque 3.3.1** A cause de l'axisymétrie, la solution  $\mathbf{u}$  a une dérivée normale sur l'axe de l'axisymétrie et pour tout  $(r, \theta, z) \in \Omega$ , on a:

1.  $\mathbf{u}(r, \theta, z) = u(r, z)$ .
2.  $\Delta \mathbf{u}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(r, z)$ .
3.  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = 2\pi \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right) r \, dr \, dz$ . ■

Le problème réduit ( $P$ ) est donné par:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_0, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Un problème équivalent de (3.3.5) est donné par:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (3.3.6)$$

avec  $f$  une fonction à construire, cf. Annexe 1.

Notons par  $\Delta_r$  l'opérateur défini par

$$\Delta_r v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (3.3.7)$$

Dans la suite, nous nous intéressons à la résolution du problème (3.3.6). Pour cela, considérons l'espace  $L_1^2(\Omega)$  des fonctions mesurables  $v$  telles que

$$\int_{\Omega} |v|^2 r \, dr \, dz < \infty.$$

Pour tout entier  $m$ , notons par  $H_1^m(\Omega)$  l'espace

$$H_1^m(\Omega) = \{v \in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha v \in L_1^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,1,\Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} |v|^2 r \, dr \, dz \right\}^{1/2}, \quad v \in L_1^2(\Omega), \\ \|v\|_{m,1,\Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} |v|^2 r \, dr \, dz + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 r \, dr \, dz \right\}^{1/2}, \quad v \in H_1^m(\Omega), \\ |v|_{m,1,\Omega} &= \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 r \, dr \, dz \right\}^{1/2}, \quad v \in H_1^m(\Omega). \end{aligned}$$

Les espaces  $L_1^2(\Omega)$  et  $H_1^m(\Omega)$  munis respectivement des normes  $\|\cdot\|_{0,1,\Omega}$  et  $\|\cdot\|_{m,1,\Omega}$  sont des espaces de Hilbert et  $|\cdot|_{m,1,\Omega}$  est une semi norme sur  $H_1^m(\Omega)$ .

**Remarque 3.3.2** • *Il est clair que:*

$$L^2(\Omega) \subset L_1^2(\Omega) \quad \text{et} \quad H^m(\Omega) \subset H_1^m(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- *Dans le cas de géométries avec singularité d'arête, puisque le domaine  $\Omega$  est borné et  $r > 0$ , alors les normes de Sobolev usuelles et avec poids sont équivalentes, en effet: Il existe des constantes  $m$  et  $M$  telles que:  $m \leq r \leq M$ , donc*

$$m \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dr \, dz \leq \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 r \, dr \, dz \leq M \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dr \, dz. \blacksquare$$

Définissons le sous espace  $V$  de  $H_1^1(\Omega)$  par  $V = \{v \in H_1^1(\Omega) \mid \text{tel que } v|_{\Gamma_D} = 0\}$ .  
Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = (f, v)_1, \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

où  $a(., .)$  est la forme bilinéaire définie par  $a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, r \, dr \, dz$ ,  $\forall v, w \in V$  et  $(., .)_1$  est le produit scalaire dans  $L_1^2(\Omega)$ .

**Proposition 3.3.1** *Le problème (3.3.8) admet une et une seule solution  $u$  dans  $V$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $f$  telle que*

$$\|u\|_{1,1,\Omega} \leq C \|f\|_{0,1,\Omega}.$$

**Preuve.** La démonstration est classique et résulte de l'application du théorème de Lax-Milgram.  $\blacksquare$

En général, la solution  $u$  n'a pas la régularité  $H_1^2$  et par conséquent, elle se décompose en une partie régulière et une partie singulière. On s'intéresse dans la suite à caractériser la partie singulière.

### 3.4 Estimation a priori

Rappelons l'opérateur  $\Delta_r$  donné par (3.3.7):

$$\Delta_r u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Pour que  $\Delta_r u$  soit dans  $L_1^2(\Omega)$ , il faut que  $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$  le soit aussi.

Considérons l'espace  $W$ , défini par

$$W = \{v \in D_1^2(\Omega) \mid \text{tel que } v|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0\},$$

où  $D_1^2(\Omega)$  est le sous espace de  $H_1^2(\Omega)$  défini par

$$D_1^2(\Omega) = \{v \in H_1^2(\Omega) \quad \text{tel que} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \in L_1^2(\Omega)\},$$

muni de la norme  $\|v\|_{D_1^2(\Omega)} = \left\{ \|v\|_{2,1,\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{1,1,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$ .

**Remarque 3.4.1** On a

$$W \subset D_1^2(\Omega) \subset H_1^2(\Omega). \blacksquare$$

Dans ce paragraphe, en s'appuyant sur des résultats de [13] nous prouvons une estimation pour les éléments de  $W$ .

**Lemme 3.4.1** *Il existe une constante  $c$  strictement positive telle que pour tout  $v \in W$ , On a*

$$\|v\|_{0,1,\Omega}^2 + |v|_{1,1,\Omega}^2 \leq c \|\Delta_r v\|_{0,1,\Omega}^2.$$

**Preuve.** On a  $-\int_{\Omega} (\Delta_r v) v \, r \, dr \, dz = |v|_{1,1,\Omega}^2$ . Par conséquent le lemme s'établit en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré.  $\blacksquare$

**Lemme 3.4.2** *Il existe une constante  $c$  strictement positive telle que pour tout  $v \in W$ , on a*

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{0,1,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|_{0,1,\Omega}^2 \leq c \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\|_{0,1,\Omega}^2.$$

**Preuve.** La démonstration de ce lemme est basée sur l'application de l'inégalité de Hardy, cf. [31], Théorème 330. En effet:

Posons  $w = r \frac{\partial v}{\partial r}$ ; il est clair que  $w(0, z) = 0$ .

Il est facile de voir que  $w$  est dans  $H^1(\Omega)$ , on peut donc écrire

$$w(r, z) = \int_0^r \frac{\partial w}{\partial r}(s, z) \, ds.$$

Une majoration élémentaire donne:

$$r^{-3/2} |w(r, z)| \leq \frac{1}{r} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{s}} \left| \frac{\partial w}{\partial r}(s, z) \right| \, ds.$$

Notons  $\tilde{w}$  et  $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}$  les prolongements de  $w$  et  $\frac{\partial w}{\partial r}$  respectivement par zéro. Par application de l'inégalité de Hardy, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{r^2} \tilde{w}(r, z) \right|^2 r \, dr \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}(r, z) \right|^2 r \, dr.$$

Après intégration en  $z$ , on obtient

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{0,1,\Omega} \leq \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\|_{0,1,\Omega}, \quad (3.4.9)$$



ceci d'une part.

D'autre part

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

donc, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|_{0,1,\Omega} \leq \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{0,1,\Omega} + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\|_{0,1,\Omega}. \quad (3.4.10)$$

En combinant ( 3.4.9) et ( 3.4.10), nous obtenons

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{0,1,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|_{0,1,\Omega}^2 \leq 5 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\|_{0,1,\Omega}^2.$$

D'où le résultat. ■

**Théorème 3.4.1** *Pour tout  $v \in W$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que, on a*

$$\|v\|_{D_1^2(\Omega)} \leq c \|\Delta_r v\|_{0,1,\Omega}.$$

**Preuve.** Ce théorème est une conséquence du Théorème 4.1. de [7]. ■

**Conséquence.** Ce théorème prouve que l'opérateur  $-\Delta_r : W \longrightarrow L_1^2(\Omega)$  est injectif et que son image  $Im \Delta_r$  est fermée dans  $L_1^2(\Omega)$ . Nous pouvons donc décomposer  $L_1^2(\Omega)$  en une somme directe orthogonale de  $Im \Delta_r$  et d'un sous espace fermé  $L = (Im \Delta_r)^\perp$ :  $L_1^2(\Omega) = Im \Delta_r \oplus L$ . Ensuite, il s'agit de caractériser le sous espace  $L$ .

### 3.5 Relations entre la solution et la solution réduite

Etant donné  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ; soit  $f$  sa restriction à  $\Omega$ . Notons par  $\mathbf{v}$  et  $v$  les solutions des problèmes aux limites suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{v} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (3.5.11)$$

Nous supposons que le problème est axisymétrique, i.e la géométrie  $\Omega$  et le second membre  $\mathbf{f}$  le sont.

**Proposition 3.5.1** *On a les propriétés suivantes:*

$$1. \ f \in L_1^2(\Omega) \text{ et } \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{0,1,\Omega}.$$

$$2. \ \mathbf{v}(r, \theta, z) = v(r, z), \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega.$$

3.  $v \in L_1^2(\Omega)$  et  $\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} = \sqrt{2\pi}\|v\|_{0,1,\Omega}$ .

4. Si  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ , alors  $\|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} = \sqrt{2\pi}\|\nabla v\|_{0,1,\Omega}$ . ■

Notons  $\mathbf{v}_\epsilon$  et  $v_\epsilon$  les solutions dans les domaines arrondis associés aux problèmes (3.5.11). Dans la suite, nous établissons une expression analytique de  $\frac{\partial \mathbf{v}_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$ .

Définissons la fonction  $\mathbf{v}_1^*$  en coordonnées cartésiennes par

$$\mathbf{v}_1^*(x, y, z) = \frac{z - z^*}{(x^2 + y^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées cylindriques  $\mathbf{v}_1^*$  s'écrit

$$\mathbf{v}_1^*(r, \theta, z) = \frac{z - z^*}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}} = v_1^*(r, z).$$

Définissons les deux fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{k}$  par

$$\mathbf{g} = -\mathbf{v}_1^* \text{ sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \quad \mathbf{k} = -\frac{\partial \mathbf{v}_1^*}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_N$$

Soit  $\mathbf{v}_2^*$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ \mathbf{v}_2^* &= \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2^*}{\partial n} &= \mathbf{k} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

**Lemme 3.5.1** On a

$$\mathbf{v}_2^*(r, \theta, z) = v_2^*(r, z),$$

où  $v_2^*$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_2^* &= -v_1^* & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

■

Posons

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2^*.$$

**Proposition 3.5.2** *On a :*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(C_\epsilon) = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon). \blacksquare$$

**Proposition 3.5.3** *On a*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(C_\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v}^* r \, dr \, d\theta \, dz. \quad (3.5.12)$$

**Preuve.** On a

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v}^* r \, dr \, d\theta \, dz = \int_{\Omega} f(r, z) v^*(r, z) r \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi \int_{\Omega} f(r, z) v^*(r, z) r \, dr \, dz,$$

or, on verra d'après le théorème 4.2.1 que

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* r \, dr \, dz,$$

d'où le résultat.  $\blacksquare$



## Chapitre 4

Etude d'un problème elliptique  
axisymétrique en dimension trois,  
dans un domaine à singularité  
conique.

# Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert, borné de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface de révolution  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , engendrée par la rotation autour de l'axe vertical ( $Oz$ ), présentant une singularité conique, cf. Section 3.1.1.

Etant donné  $\mathbf{h}_0$  dans  $H^{3/2}(\Gamma \cup \Gamma_0)$ , soit  $\mathbf{u}$  la solution du problème (3.2.4) et soit  $v \in L_1^2(\Omega)$  la solution du problème (3.3.6), cf. Section 3.3

$$\begin{cases} -\Delta_r v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

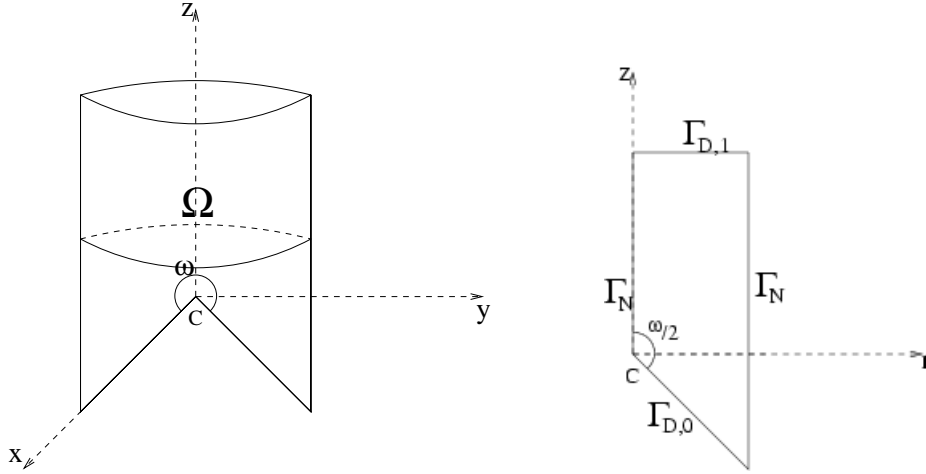


Figure 4.1: Les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega$

Dans la section suivante, on s'intéressera à caractériser la solution  $v$ .

## 4.1 Structure de la solution

### 4.1.1 Décomposition en partie régulière et partie singulière

Caractérisation de  $L$  et identification de ses éléments

**Lemme 4.1.1** *Le sous espace  $L$  de  $L_1^2(\Omega)$  est caractérisé par*

$$L = \{v \in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } \Delta_r v = 0, v|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0\}.$$

**Preuve.** Soit  $v \in L_1^2(\Omega)$  tel que  $\Delta_r v = 0$ ,  $v|_{\Gamma_D} = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0$ .

On sait d'après [27], que  $W \cap H_1^3(\Omega)$  est dense dans  $W$ , donc pour tout  $w \in W$ , on a

$$(\Delta_r w, v)_1 = \int_{\Omega} \Delta_r w v r dr dz = \int_{\Omega} w \Delta_r v r dr dz + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial n} v - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) r d\sigma = 0.$$

Ainsi,  $v$  est dans  $L$ .

Réciproquement, soit  $v$  dans  $L$ , alors  $(\Delta_r w, v)_1 = 0$  pour tout  $w \in W$ , en particulier pour tout  $w$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Par suite  $\Delta_r v = 0$  au sens de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .  
Considérons l'espace

$$H(\Delta_r, \Omega) = \{v \in L_1^2(\Omega) \text{ tel que } \Delta_r v \in L_1^2(\Omega)\}.$$

Il est facile de prouver que cet espace est un espace de Hilbert, muni de la norme

$$|||v||| = \left\{ ||v||_{0,1,\Omega}^2 + ||\Delta_r v||_{0,1,\Omega}^2 \right\}^{1/2}.$$

De plus tout élément  $v$  de  $H(\Delta_r, \Omega)$  possède une trace dans  $H_1^{-1/2}(\Gamma_D)$ , ainsi que sa dérivée dans  $H_1^{-3/2}(\Gamma_N)$ . D'après le lemme 4.7 de [7], on a

$$(\Delta_r w, v)_1 - (w, \Delta_r v)_1 = \left\langle \frac{\partial w}{\partial n}, v \right\rangle - \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle.$$

Puisque le premier membre est nul, alors

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial n}, v \right\rangle - \left\langle w, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle = 0.$$

Enfin, la surjection des opérateurs de traces entraîne que  $v|_{\Gamma_D} = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0$ . ■

**Remarque 4.1.1** *Il est clair que:  $L \cap H_1^1(\Omega) = \{0\}$ . ■*

Considérons les coordonnées polaires:  $-z = \rho \cos \varphi$ ,  $r = \rho \sin \varphi$ , (cf. Figure. 4.2) et définissons le domaine

$$D_R = \{(\rho, \varphi) \in \Omega, \text{ tel que } 0 < \rho < R\},$$

où  $R$  est assez petit pour que  $D_R$  ne contienne aucun autre sommet que  $O$ .

**Notation.**  $\beta$  est le réel tel que  $\frac{w}{2} = \frac{\pi}{\beta}$ .

**Remarque 4.1.2** *Ainsi, un point de  $\Omega$ , cf. Figure. 4.2, s'écrit en fonction de  $\rho$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sous la forme:*

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = -\rho \cos \varphi. \quad \blacksquare$$

L'opérateur  $\Delta_r$  s'écrit en fonction de  $\rho$  et  $\varphi$  comme suit:

$$\Delta_r v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

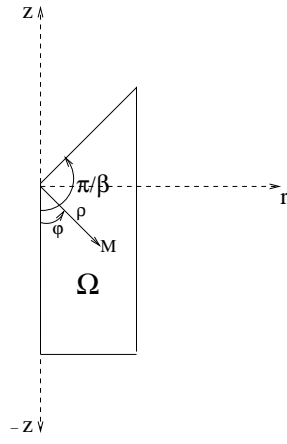


Figure 4.2: Les coordonnées polaires

Définissons l'opérateur  $\Lambda$  dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \{u : ]0, \pi/\beta[ \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^{\pi/\beta} |u|^2 \sin \varphi \, d\varphi < \infty\} = L^2([0, \pi/\beta[, \sin \varphi \, d\varphi),$$

par  $(\Lambda u)(\varphi) = -u''(\varphi) - \cot \varphi \, u'(\varphi)$ .

L'opérateur  $\Lambda$  est non borné et auto-adjoint dans son domaine

$$D(\Lambda) = \{u \in \mathcal{H} \text{ tel que } \Lambda u \in \mathcal{H} \text{ et } u(\pi/\beta) = u'(0) = 0\}.$$

Ainsi

$$\Delta_r v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Lambda v.$$

**Théorème 4.1.1** *Il existe une base hilbertienne  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{H}$  formée de fonctions propres de  $\Lambda$  dont les valeurs propres associées  $\lambda_k$  sont simples et strictement positives et tendent vers l'infini. ■*

**Identification des  $(u_k, \lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$**  . Soit  $u \in \mathcal{H}$  une fonction propre de  $\Lambda$  de valeur propre associée  $\lambda$ . Posons  $\lambda = \nu(\nu + 1)$ , avec  $\nu > 0$ , on a

$$u''(\varphi) + \cot \varphi \, u'(\varphi) + \nu(\nu + 1)u(\varphi) = 0. \quad (4.1.1)$$

Posons  $x = \cos \varphi$  et  $u(\varphi) = y(\cos \varphi) = y(x)$ . Par conséquent (4.1.1) devient

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu + 1)y(x) = 0. \quad (4.1.2)$$

C'est une équation différentielle de Legendre d'indices  $\nu$  et 0. Or,  $u$  est dans  $D(\Lambda)$ , donc  $u(\pi/\beta) = u'(0) = 0$ . Ainsi  $u$  est solution de l'équation

$$\begin{cases} (1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu + 1)y(x) = 0, \\ y(\cos(\frac{\pi}{\beta})) = y'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1.3)$$



La solution générale de (4.1.2) est donnée par

$$y(x) = a P_\nu^0(x) + b Q_\nu^0(x), \quad \text{ou} \quad u(\varphi) = a P_\nu^0(\cos \varphi) + b Q_\nu^0(\cos \varphi),$$

où  $P_\nu^0$  est la fonction de Legendre de première espèce et  $Q_\nu^0$  est la fonction de Legendre de deuxième espèce, cf. [2].

La fonction  $Q_\nu^0(x)$  est infinie pour la valeur  $x = 1$ , c'est à dire  $\varphi = 0$ , d'autre part  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'axe  $Oz$ , en particulier en 0. Ainsi la condition  $u(\pi/\beta) = u'(0) = 0$  est satisfaite si et seulement, si  $b = 0$  et  $P_\nu^0(\cos \frac{\pi}{\beta}) = 0$ .

Soit maintenant  $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la suite des  $\nu > 0$  vérifiant  $P_\nu^0(\cos \frac{\pi}{\beta}) = 0$  rangés en ordre croissant, les  $\lambda_k = \nu_k(1 + \nu_k)$  sont les valeurs propres de  $\Lambda$  et  $u_k = C_k P_{\nu_k}^0(\cos \varphi)$ , avec  $C_k$  une normalisation, les fonctions propres associées.

**Remarque 4.1.3** *Il est facile de vérifier que pour tous  $k, k'$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a*

$$\langle u_k, u_{k'} \rangle_{\mathcal{H}} = C_k C_{k'} \int_{\cos(\pi/\beta)}^1 P_{\nu_k}^0(t) P_{\nu_{k'}}^0(t) dt.$$

La normalisation  $C_k$  est donc donnée par

$$(C_k)^2 = \frac{1}{\int_{\cos(\pi/\beta)}^1 P_{\nu_k}^0(t)^2 dt}. \blacksquare$$

**Lemme 4.1.2** *Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$ , on a*

1.  $\rho^\sigma u_k(\varphi) \in L_1^2(D_R)$ , si et seulement, si  $\sigma > -3/2$ .
2.  $\rho^\sigma u_k(\varphi) \in H_1^1(D_R)$ , si et seulement, si  $\sigma > -1/2$ .
3.  $\rho^\sigma u_k(\varphi) \in H_1^2(D_R)$ , si et seulement, si  $\sigma > 1/2$ .  $\blacksquare$

**Conséquence.** Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\nu_k > 0$ , alors une conséquence immédiate du lemme précédent est que  $\rho^{\nu_k} u_k(\varphi)$  est dans  $H_1^1(D_R)$ , pour tout  $k$  et  $\rho^{\nu_k} u_k(\varphi)$  est dans  $H_1^2(D_R)$ , pour tout  $k$  tel que  $\nu_k > 1/2$ .

Soit  $v \in L$ , donc  $\Delta_r v = 0$ . Pour  $\rho$  fixé, on a  $v(\rho, \cdot)$  est dans  $\mathcal{H}$  et il existe donc des constantes réelles  $v_k(\rho)$  telles que  $v(\rho, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} v_k(\rho) u_k(\varphi)$ , avec  $u_k(\varphi) = C_k P_{\nu_k}^0(\cos \varphi)$ .

La condition  $\Delta_r v = 0$  entraîne que  $v_k''(\rho) + \frac{2}{\rho} v_k'(\rho) - \frac{\nu_k(1 + \nu_k)}{\rho^2} v_k(\rho) = 0$ .

Et par conséquent  $v_k(\rho) = a_k \rho^{\nu_k} + b_k \rho^{-(1+\nu_k)}$ ,  $a_k$  et  $b_k$  étant des constantes réelles.

Ainsi

$$v(\rho, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \rho^{\nu_k} u_k(\varphi) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} b_k \rho^{-(1+\nu_k)} u_k(\varphi). \quad (4.1.4)$$

La première série de l'égalité (4.1.4) est convergente dans  $H_1^1(D_R)$ , soit  $v_r$  sa limite. De plus le fait que  $v$  est dans  $L_1^2(D_R)$  implique que  $b_k$  est nul lorsque  $-(1 + \nu_k)$  est inférieur ou égal à  $-\frac{3}{2}$ , c-à-d  $\nu_k \geq \frac{1}{2}$ . Par conséquent, dans  $D_R$ ,  $v(\rho, \cdot)$  s'écrit

$$v(\rho, \varphi) = v_r + \sum_{k \in \mathbb{N}^*, \nu_k < \frac{1}{2}} b_k \rho^{-(1+\nu_k)} u_k(\varphi). \quad (4.1.5)$$

### Fonctions singulières duales

Nous sommes à présent en mesure de définir les fonctions singulières duales associées au sommet  $O$ .

- Soit  $k$  un entier naturel non nul vérifiant  $0 < \nu_k < \frac{1}{2}$ . Posons  $S_k^* = \rho^{-1-\nu_k} u_k(\varphi) \Phi(\rho)$  où  $\Phi$  est une fonction de troncature à support dans  $\overline{D_R}$ , égale à 1 pour  $\rho < \frac{R}{2}$  et 0 pour  $\rho > \frac{2}{3}R$ . Il vient alors

$$\Delta_r S_k^* \in L_1^2(\Omega), \quad S_k^*|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_k^*}{\partial n}|_{\Gamma_N} = 0.$$

- Soit  $v_k^*$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_k^* = \Delta_r S_k^* & \text{dans } \Omega, \\ v_k^* = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_k^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

La solution  $v_k^*$  existe et elle est unique dans l'espace  $V$ .

- La fonction  $u_k^* = S_k^* + v_k^*$  est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_r u_k^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_k^* = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_k^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

**Définition 4.1.1** *Les fonctions  $u_k^*$  ainsi construites sont appelées fonctions singulières duales associées au sommet  $O$ . ■*

**Lemme 4.1.3** *Les fonctions  $u_k^*$  sont linéairement indépendantes. ■*

**Lemme 4.1.4** *Dans  $D_R$ , on a*

$$v(\rho, \varphi) - \sum_{k \in \mathbb{N}^*, \nu_k < \frac{1}{2}} b_k u_k^* \in H_1^1(D_R).$$

**Preuve.** Ce lemme s'obtient en remplaçant dans (4.1.5)  $S_k^*$  par  $u_k^* - v_k^*$ . ■

## Fonctions singulières

Soit  $k$  un entier naturel non nul tel que  $0 < \nu_k < \frac{1}{2}$ . Considérons la fonction  $S_k(\rho, \varphi) = \rho^{\nu_k} u_k(\varphi) \Phi(\rho)$  où  $\Phi$  est une fonction de troncature valant 1 au voisinage de  $O$ .

Du fait que  $0 < \nu_k < \frac{1}{2}$ ,  $S_k \in H_1^1(\Omega)$  et  $S_k \notin H_1^2(\Omega)$ . Elle vérifie de plus  $\Delta_r S_k \in L_1^2(\Omega)$  et les conditions aux limites du problème (3.3.6).

**Définition 4.1.2** *Les fonctions  $S_k$  sont appelées fonctions singulières associées au sommet  $O$ . ■*

**Lemme 4.1.5** *Les fonctions  $S_k$  sont linéairement indépendantes. ■*

**Remarque 4.1.4** *Le nombre de fonctions singulières est égal à celui des fonctions singulières duales, c'est le cardinal du sous ensemble  $\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 < \nu_k < \frac{1}{2}\}$  de  $\mathbb{N}^*$ . ■*

**Notation.** Notons par  $I$  le sous ensemble de  $\mathbb{N}^*$

$$I = \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 < \nu_k < \frac{1}{2}\}. \blacksquare$$

**Théorème 4.1.2** *On a*

1. *Le sous espace  $L$  est de dimension finie et sa dimension est égale au cardinal de  $I$ . De plus la famille  $(u_k^*)_{k \in I}$  est une base de  $L$ .*
2. *Pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , il existe des réels  $\mu_k$ ,  $k \in I$  et  $v_r \in W$ , tels que la solution  $v$  de (3.3.6) s'écrit  $v = v_r + \sum_{k \in I} \mu_k S_k$ .*
3. *Le coefficient  $\mu_1$  est donné par:*

$$\mu_1 = \frac{1}{(2\nu_1 + 1) \int_0 \pi / \beta |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f, u_1^*)_1. \quad (4.1.6)$$

**Preuve.**

1. Les  $u_k^*$  sont linéairement indépendantes dans  $L$  au voisinage de  $O$ . Donc  $\dim L \geq \text{card } I$ . En vertu du lemme 4.1.4, tout élément  $v$  de  $L$  au voisinage de  $O$  s'écrit sous la forme:

$$v(\rho, \varphi) = v_r + \sum_{k \in I} b_k u_k^*, \quad \text{avec } v_r \in H_1^1(D_R).$$

Comme  $v$  et les  $u_k^*$  sont harmoniques et vérifient les conditions aux limites du problème (3.3.6), il en est de même de  $v_r$ . Or,  $v_r$  est dans  $H_1^1(\Omega)$ , elle est donc nulle. Ainsi  $v$  est une combinaison linéaire des  $u_k^*$  et par conséquent, la famille  $(u_k^*)_{k \in I}$  est une base de  $L$ .

2. Posons  $f_k = -\Delta_r S_k$ . Les  $S_k$  ne sont pas dans  $H_1^2(\Omega)$ , donc les  $f_k$  ne sont pas dans  $\text{Im } \Delta_r$ . Par conséquent, il existe une famille  $(w_k)_{k \in I}$  d'éléments de  $W$  telle que

$$f_k - \Delta_r w_k \in L, \quad \forall k \in I$$

La famille  $(f_k - \Delta_r w_k)_{k \in I}$  est une base de  $L$ ; En effet:

Si  $(\alpha_k)_{k \in I}$  est une famille de réels telle que

$$\sum_{k \in I} \alpha_k (f_k - \Delta_r w_k) = 0,$$

alors

$$\Delta_r \left( \sum_{k \in I} \alpha_k (S_k + w_k) \right) = 0.$$

Comme pour tout  $k \in I$ ,  $S_k \in H_1^1(\Omega)$ ,  $w_k \in W$  et  $S_k, w_k$  vérifie les conditions aux limites du problème (3.3.6), alors

$$\sum_{k \in I} \alpha_k S_k = - \sum_{k \in I} \alpha_k w_k$$

Puisque  $S_k$  n'est pas dans  $H_1^2(\Omega)$ , donc

$$\sum_{k \in I} \alpha_k S_k = 0.$$

D'où  $\alpha_k = 0$ , pour tout  $k \in I$ , puisque les  $S_k$  sont linéairement indépendantes.

Par conséquent tout élément  $f$  de  $L^2(\Omega)$  se décompose de manière unique sous la forme

$$f = f' + \sum_{k \in I} \mu_k (f_k - \Delta_r w_k) \quad \text{avec } f' \in \text{Im } \Delta_r.$$

Il existe  $v_r \in W$  telle que  $-\Delta_r v_r = f' - \sum_{k \in I} \mu_k \Delta_r w_k$ . Par suite, la solution  $v$  de (3.3.6) s'écrit,  $v = v_r + \sum_{k \in I} \mu_k S_k$ .

3. Pour un réel  $\delta > 0$  destiné à tendre vers zéro, posons

$$\Omega_\delta = \{(\rho, \varphi) \in \Omega, \quad \rho > \delta\}.$$

Comme  $u_1^*$  est régulière dans  $\Omega_\delta$ , on a

$$- \int_{\Omega_\delta} f u_1^* r \, dr \, dz = \int_{\Omega_\delta} \Delta_r v u_1^* r \, dr \, dz = \int_{\partial \Omega_\delta} \left( \frac{\partial v}{\partial n} u_1^* - v \frac{\partial u_1^*}{\partial n} \right) r \, d\sigma.$$

Compte tenu des conditions aux limites sur  $v$  et  $u_1^*$ , l'intégrale sur le bord se réduit à une intégrale sur l'arc de cercle  $\mathcal{C}_\delta$  de centre  $O$  et de rayon  $\delta$  contenu dans  $\Omega$ . Donc

$$- \int_{\Omega_\delta} f u_1^* r \, dr \, dz = \int_{\mathcal{C}_\delta} \left( \frac{\partial v}{\partial n} u_1^* - v \frac{\partial u_1^*}{\partial n} \right) \delta \, d\sigma. \quad (4.1.7)$$

Utilisons les décompositions

$$v = v_r + \sum_{i \in I} \mu_i S_i \quad \text{et} \quad u_1^* = v_2^* + \rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi), \quad v_r, v_2^* \in H_1^1(\Omega).$$

Reportons ces expressions dans le second membre de (4.1.7). Nous montrons comme dans la preuve du théorème 1.2.3, que les contributions venant de  $v_r$  et  $v_2^*$  tendent vers zéro avec  $\delta$ . De même les contributions venant de  $S_i$  et  $\rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)$  tendent vers zéro avec  $\delta$  pour  $i \neq 1$ . Il reste le terme où interviennent  $S_1$  et  $\rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)$ , or

- $\frac{\partial S_1}{\partial n} = -\frac{\partial S_1}{\partial \rho} = -\nu_1 \rho^{\nu_1-1} u_1(\varphi),$
- $\frac{\partial}{\partial n}(\rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)) = -\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)) = (1 + \nu_1) \rho^{-\nu_1-2} u_1(\varphi).$

Ainsi

$$-\int_{\Omega_\delta} f u_1^* r \, dr \, dz = -(1 + 2\nu_1) \mu_1 \int_{\mathcal{C}_\delta} \delta^{-2} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, \delta^2 \, d\varphi.$$

Faisons tendre  $\delta$  vers zéro, nous obtenons

$$\int_{\Omega} f u_1^* r \, dr \, dz = (1 + 2\nu_1) \mu_1 \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi.$$

■

**Remarque 4.1.5** *On ne peut pas dire que pour  $k \in I$ ,  $k \neq 1$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $f$  et de  $\omega$  telle que  $\mu_k = C(f, u_k^*)_1$ , car dans (4.1.7), on peut avoir des contributions venant de  $S_i$  et  $\rho^{-1-\nu_k} u_k(\varphi)$  qui tendent vers l'infini avec  $\delta$ . Par contre, on peut construire un algorithme qui nous permet de calculer ces coefficients  $\mu_k$ , cf. page 88.*

■

## 4.1.2 Formule de représentation des coefficients de singularité

### Expression de la solution au voisinage de la singularité sous forme d'une série

Supposons que le problème aux limites qu'on va résoudre est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_r u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_{D,0}, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,1}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (4.1.8)$$

avec  $h_0$  une constante.

Pour  $R > 0$  fixé, considérons le sous domaine  $D_R$  de  $\Omega$  défini par:

$$D_R = \{(\rho, \varphi) ; 0 < \rho < R\} \cap \Omega,$$

et supposons que  $R$  est choisi de telle façon que  $D_R$  ne contienne aucun sommet de  $\Omega$  autre que  $O$ .

**Proposition 4.1.1** *La solution  $u$  peut s'écrire dans  $D_R$  sous la forme*

$$u(\rho, \varphi) = h_0 + \sum_{k>0} a_k \rho^{k\nu_k} P_{\nu_k}^0(\cos \varphi), \quad (4.1.9)$$

où les  $a_k$  sont des réels.

**Preuve.** Pour  $\rho > 0$  fixé,  $u(\rho, \varphi)$  est considérée comme fonction  $u_\rho(\cdot)$  de  $\varphi$  sur  $]0, \pi/\beta[$ , la fonction  $u_\rho$  vérifie:  $u_\rho(0) = u'_\rho(\pi/\beta) = 0$ , elle est donc dans  $D(\Lambda)$ . Ainsi, elle peut être développée sous la forme

$$u_\rho(\varphi) - h_0 = \sum_{k>0} A_k(\rho) P_{\nu_k}^0(\cos \varphi), \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{\beta}.$$

On sait bien que cette série converge dans  $L_1^2(0, \pi/\beta)$ , ainsi que sa dérivée.  $\Delta_r u = 0$  dans  $D_R$  implique que  $A_k(\rho)$  est solution de l'équation différentielle

$$A_k''(\rho) + \frac{2}{\rho} A_k'(\rho) - \left( \frac{\nu_k(1 + \nu_k)}{\rho^2} \right) A_k(\rho) = 0,$$

on obtient alors pour tout entier naturel  $k > 0$ ,

$$A_k(\rho) = a_k \rho^{\nu_k} + b_k \rho^{-1-\nu_k},$$

où  $a_k$  et  $b_k$  sont des réels.

Ainsi, dans  $D_R$ ,  $u(\rho, \varphi)$  s'écrit

$$u(\rho, \varphi) - h_0 = \sum_{k>0} a_k \rho^{\nu_k} P_{\nu_k}^0(\cos \varphi) + \sum_{k>0} b_k \rho^{-1-\nu_k} P_{\nu_k}^0(\cos \varphi).$$

La première série converge dans  $H_1^1(D_R)$  et le fait que  $u$  est dans  $H_1^1(D_R)$  et  $\nu_k > 0$ , c'est à dire  $-1 - \nu_k < -\frac{1}{2}$  entraînent que  $b_k = 0$  pour tout  $k > 0$ . Ainsi,

$$u(\rho, \varphi) - h_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \rho^{\nu_k} P_{\nu_k}^0(\cos \varphi).$$

D'où la proposition. ■

**Remarque 4.1.6** *Le coefficient  $a_1$  doit être égal au coefficient  $\mu_1$  donné dans le théorème 4.1.2.* ■

### Calcul du coefficient $a_1$

- Posons  $v_1^*(\rho, \varphi) = \rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)$ .
- Soit  $v_2^*$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_2^* = -v_1^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

- Posons  $v^* = v_1^* + v_2^*$ .

Dans la suite, nous prouvons que  $a_1$  peut s'exprimer en fonction du produit scalaire de  $f$  et de  $v^*$  dans  $L_1^2(\Omega)$ .

On a vu, d'après le théorème 4.1.2, que

$$a_1 = \frac{1}{(2\nu_1 + 1) \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f, v^*)_1. \quad (4.1.11)$$

**Remarque 4.1.7** Par le changement de variable  $x = \cos \varphi$ , on a  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^1 |P_{\nu_1}^0(x)|^2 dx$

### Algorithme pour le calcul des coefficients de Fourier

Notons par  $\eta$  une fonction de troncature qui vaut 1 dans  $D_R$ .

#### 1. Étape 1:

On pose  $u^{(1)} := u$  et  $f^{(1)} := f$ . D'après (4.1.11)

$$a_1 = \frac{1}{(2\nu_1 + 1) \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f^{(1)}, v^{(1)})_1.$$

avec:  $v_1^{(1)}(\rho, \varphi) := \rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)$ ,  $v_2^{(1)}$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^{(1)} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_2^{(1)} = -v_1^{(1)} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

et

$$v^{(1)} := v_1^{(1)} + v_2^{(1)}.$$

#### 2. Étape 2:

On pose  $u^{(2)} := u^{(1)} - a_1 \rho^{\nu_1} u_1(\varphi) \eta(\rho)$  et  $f^{(2)} := -\Delta u^{(2)}$ .

On pose aussi:

(a)  $v_1^{(2)}(\rho, \varphi) := \rho^{-1-\nu_2} u_2(\varphi)$ .

(b)  $v_2^{(2)}$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^{(2)} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_2^{(2)} = -v_1^{(2)} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

(c)  $v^{(2)} := v_1^{(2)} + v_2^{(2)}$ .

On démontre comme dans le théorème 4.1.2, que

$$a_2 = \frac{1}{(2\nu_2 + 1) \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_2(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f^{(2)}, v^{(2)})_1.$$

### 3. Étape k:

On pose  $u^{(k)} := u^{(k-1)} - \sum_{l=1}^{k-1} a_l \rho^{\nu_l} u_l(\varphi) \eta(\rho)$  et  $f^{(k)} := -\Delta u^{(k)}$ .

On pose aussi:

(a)  $v_1^{(k)}(\rho, \varphi) := \rho^{-1-\nu_k} u_k(\varphi).$

(b)  $v_2^{(k)}$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^{(k)} &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_2^{(k)} &= -v_1^{(k)} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial n} &= -\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

(c)  $v^{(k)} := v_1^{(k)} + v_2^{(k)}.$

On a

$$a_k = \frac{1}{(2\nu_k + 1) \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_k(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f^{(k)}, v^{(k)})_1.$$

## 4.2 Le domaine avec le coin arrondi

### 4.2.1 Description du domaine arrondi et problème associé

La solution  $v$  a un gradient infini au coin  $O$  à cause de la singularité conique. La présence de cette singularité entraîne des difficultés pour l'approximation numérique de la solution  $v$ .

L'idée pour enlever cette singularité est d'arrondir cet angle et de remplacer la courbe  $\Gamma$  par une courbe régulière  $\Gamma_\epsilon$  de telle sorte que  $\Gamma_\epsilon$  tend vers  $\Gamma$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro.

Notons  $\Omega_\epsilon$  ce nouveau domaine et  $\partial\Omega_\epsilon$  sa frontière (cf. Figure. 4.3), où:

$$\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_{D,\epsilon} \cup \Gamma_N \text{ avec } \Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_{D,0,\epsilon} \cup \Gamma_1 \text{ tel que } \Gamma_{D,0,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_\epsilon.$$

Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_r v_\epsilon &= \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_\epsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

avec  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

Notons aussi  $O_\epsilon = (0, z^*)$  le point intersection de l'arrondi  $\Gamma_\epsilon$  avec l'axe  $(Oz)$ . On remarque que  $z^* = z^*(\epsilon)$  dépend essentiellement de  $\Gamma_\epsilon$ .

Dans la suite, nous proposons une expression analytique de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  à l'aide de la technique du potentiel.



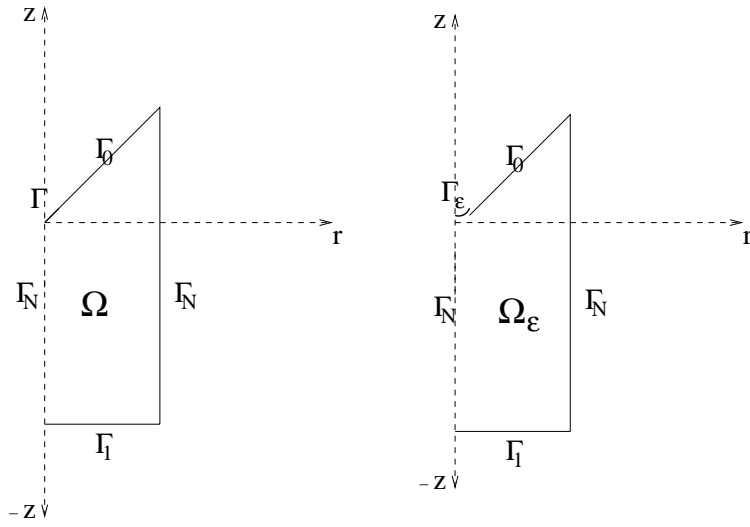


Figure 4.3: Le polygone  $\Omega$  et son arrondi

### 4.2.2 Expression analytique de la dérivée normale de la solution au milieu de “l’arrondi”

Considérons la fonction  $v_1^*$  définie par

$$v_1^*(r, z) = \frac{z - z^*}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}},$$

Notons que  $\Delta_r v_1^* = 0$ , dans  $\Omega_\epsilon$  et considérons les deux fonctions  $g$  et  $k$  définies par

$$g = -v_1^* \quad \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \quad k = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (4.2.13)$$

La forme géométrique de la courbe arrondie  $\Gamma_\epsilon$  qu’on a choisie est une parabole d’équation

$$z = \varphi(r) = -\frac{c_\omega}{\epsilon} r^2 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{avec } c_\omega = \frac{-1}{\tan^2(\frac{\omega}{2})}.$$

Définissons la fonction  $\psi$  sur  $] -\epsilon, \epsilon[$  par

$$\psi(r) = -v_1^*(r, \varphi(r)) = \frac{c_\omega \epsilon^2}{r(c_\omega^2 r^2 + \epsilon^2)^{3/2}}.$$

**Proposition 4.2.1** *La fonction  $g$  définie par (4.2.13) est dans  $H_1^{\frac{3}{2}}(\Gamma_\epsilon)$ , et on a*

1.  $\|g\|_{\frac{1}{2}, 1, \Gamma_\epsilon} = O(\frac{1}{\epsilon^{3/2}}).$
2.  $\|g\|_{\frac{3}{2}, 1, \Gamma_\epsilon} = O(\frac{1}{\epsilon^{5/2}}).$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle utilisée pour la proposition 2.4.1. ■

**Proposition 4.2.2** *On a*

1.  $\|g\|_{0,1,\partial\Omega} = O(1/\epsilon).$
2.  $\|k\|_{0,1,\partial\Omega} = O(1/\epsilon^2).$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle utilisée pour la proposition 2.4.2. ■

- Soit  $v_2^*$  la solution du problème aux limites

$$(P_\epsilon^*) \begin{cases} \Delta_r v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_2^* &= g & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= k & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

**Proposition 4.2.3** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|v_2^*\|_{1,1,\Omega_\epsilon} \leq \frac{c}{\epsilon^{3/2}}. \quad (4.2.14)$$

**Preuve.** D'après la formule de Green, on a:

$$\|\nabla v_2^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon}^2 = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial v_2^*}{\partial n} v_2^* r \, d\Gamma.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que:

$$\|\nabla v_2^*\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 \leq \|k\|_{0,1,\partial\Omega_\epsilon} \|g\|_{0,1,\partial\Omega_\epsilon}.$$

En utilisant la proposition précédente, la proposition est démontrée. ■

- Posons enfin  $v^* = v_1^* + v_2^*$ .

**Théorème 4.2.1** *La solution  $v_\epsilon$  du problème (4.2.12) vérifie la relation suivante*

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* r \, dr \, dz.$$

**Preuve.** Considérons le sous domaine  $D_\delta = \{M \in \Omega_\epsilon, \, d(M, O_\epsilon) < \delta\}$  de l'ouvert  $\Omega_\epsilon$ , l'ouvert  $\Omega_\delta = \Omega_\epsilon \setminus D_\delta$  et l'arc  $\Gamma_\delta = \partial\Omega_\delta \cap \partial D_\delta$  avec  $O_\epsilon = (0, z^*)$ .

On a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} f v^* r \, dr \, dz &= - \int_{\Omega_\delta} \Delta_r v_\epsilon v^* r \, dr \, dz \\ &= - \int_{\partial\Omega_\delta} r \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v^* - v_\epsilon \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_\delta} r \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v^* - v_\epsilon \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_\delta} r \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_1^* - v_\epsilon \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_\delta} r \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_2^* - v_\epsilon \frac{\partial v_2^*}{\partial n} \right) d\Gamma, \end{aligned}$$

$v_\epsilon$  et  $v_2^*$  étant régulières dans  $\Omega_\delta$ . Donc il est facile de prouver que les contributions venant de  $v_\epsilon$  et  $v_2^*$  tendent vers zéro avec  $\delta$ . Par suite

$$\int_{\Omega_\delta} f v^* r dr dz = - \int_{\Gamma_\delta} r \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} v_1^* - v_\epsilon \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (4.2.15)$$

Notons par  $\rho$  et  $\theta$  les coordonnées polaires.

Sur  $\Gamma_\delta$ , en utilisant la formule de Taylor d'ordre 2, on a:

$$v_\epsilon(r, z) = v_\epsilon(O_\epsilon) + r \frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(O_\epsilon) + (z - z^*) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) + 0(r^2) + 0((z - z^*)^2),$$

comme  $r = \delta \cos(\theta)$ ,  $z - z^* = \delta \sin(\theta)$ ,  $v_\epsilon(O_\epsilon) = 0$ , donc  $v_\epsilon(r, z) = \delta \sin(\theta) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) + 0(\delta^2)$ , de même, on aura

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(r, z) = -\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \rho}(r, z) = -\sin \theta \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(r, z) = -\sin \theta \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) + 0(\delta) \right) = -\sin \theta \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) + 0(\delta),$$

comme

$$v_1^*(r, z) = \frac{\sin(\theta)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial n}(r, z) = -\frac{\partial v_1^*}{\partial \rho}(r, z) = \frac{2\sin(\theta)}{\delta^3},$$

donc, en remplaçant dans (4.2.15), on obtient

$$\int_{\Omega_\delta} f v^* r dr dz = \int_{\Gamma_\delta} \left( 3\cos(\theta) \sin^2(\theta) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) + 0(\delta) \right) d\theta.$$

Faisons tendre  $\delta$  vers zéro, nous obtenons

$$\int_{\Omega} f v^* r dr dz = \left( \int_0^{\pi/2} 3\cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \right) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon) = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(O_\epsilon).$$

D'où le résultat. ■

### 4.2.3 Estimation d'erreur par une approche éléments finis

Soit  $v_{2,h}^*$  une solution approchée de  $v_2^*$ . On note

$$\left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h = \int_{\Omega} f v_h^* r dr dz, \quad \text{avec} \quad v_h^* = v_1^* + v_{2,h}^*.$$

**Lemme 4.2.1** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que:*

$$\|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon} \leq Ch^2 \epsilon^{-5/2}. \quad (4.2.16)$$

**Preuve.** On sait que

$$\|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon} \leq Ch^2 |v_2^*|_{2,1,\Omega_\epsilon}.$$

Or

$$|v_2^*|_{2,1,\Omega_\epsilon} \leq c |v_2^*|_{3/2,1,\partial\Omega_\epsilon} \quad \text{et} \quad |v_2^*|_{3/2,1,\partial\Omega_\epsilon} = 0(\epsilon^{-5/2}), \quad \text{d'après la proposition 4.2.1}$$

d'où le résultat.

■

**Proposition 4.2.4** *Il existe une constante  $C$  strictement positive indépendante de  $h$  telle que*

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \leq Ch^2 \epsilon^{-5/2} \|f\|_{0,1,\Omega}.$$

**Preuve.** On a

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| = \left| \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{f}(v_2^* - v_{2,h}^*) r \, dr \, dz \right| \leq \|f\|_{0,1,\Omega} \|v_2^* - v_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon}.$$

Ainsi, la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent. ■

**Remarque 4.2.1** *Si  $\epsilon = h^{4/5}$ , alors l'estimation précédente devient:*

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \leq C \|f\|_{0,1,\Omega}.$$

*Cette inégalité montre bien que lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, les deux termes  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  et  $\left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h$  divergent vers l'infini de la même façon, puisque leur différence est bornée. ■*

## 4.3 Résultats numériques: Comportement de la dérivée normale en fonction du rayon de courbure

### 4.3.1 Calcul de l'exposant de singularité

Soit  $\omega$  l'angle du coin  $O$ , avec  $\pi < \omega < 2\pi$  et  $v$  la solution du problème 3.3.6. On a vu précédemment que la solution  $v$  se décompose en une partie régulière et une partie singulière donnée par  $\rho^{\nu_1} \phi(\rho) u_1(\varphi)$ , où  $\phi$  est une fonction de troncature convenable,  $u_1(\varphi)$  est la fonction associée à la fonction de Legendre d'indices  $\nu_1$  et 0 donnée par:

$$u_1(\varphi) = P_{\nu_1}^0(\cos(\varphi)), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\beta}, \quad \text{avec } \beta = 2\alpha = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.3.17)$$

et  $\nu_1$  la valeur obtenue par la formule  $P_{\nu_1}^0(\cos(\pi/\beta)) = 0$  et telle que  $\nu_1 > 0$ .

**Remarque 4.3.1** • *On a vu précédemment que la solution  $v$  de (3.3.6) n'est pas dans  $H_1^2(\Omega)$ , si et seulement si  $\nu_1$  est compris strictement entre 0 et 1/2.*

- *Le gradient de  $u$  est non borné, si et seulement si  $\nu_1$  est compris strictement entre 0 et 1. ■*

D'après [2], on a

$$u_1(\varphi) = P_{\nu_1}^0(\cos \varphi) = \frac{\sin \pi \nu_1}{\pi} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left( \frac{1}{\nu_1 - 1} - \frac{1}{\nu_1 + 1 + n} \right) P_n^0(\cos \varphi). \quad (4.3.18)$$

$\omega$	$\pi/\beta^*$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$11\pi/7$	$8\pi/5$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$9\pi/5$
$\beta$	$\beta^*$	2	8/5	4/3	14/11	10/8	6/5	8/7	10/9
$\nu_1$	0	0.99	0.69	0.46	0.41	0.39	0.34	0.29	0.26

Table 4.1: Les valeurs de  $\nu_1$

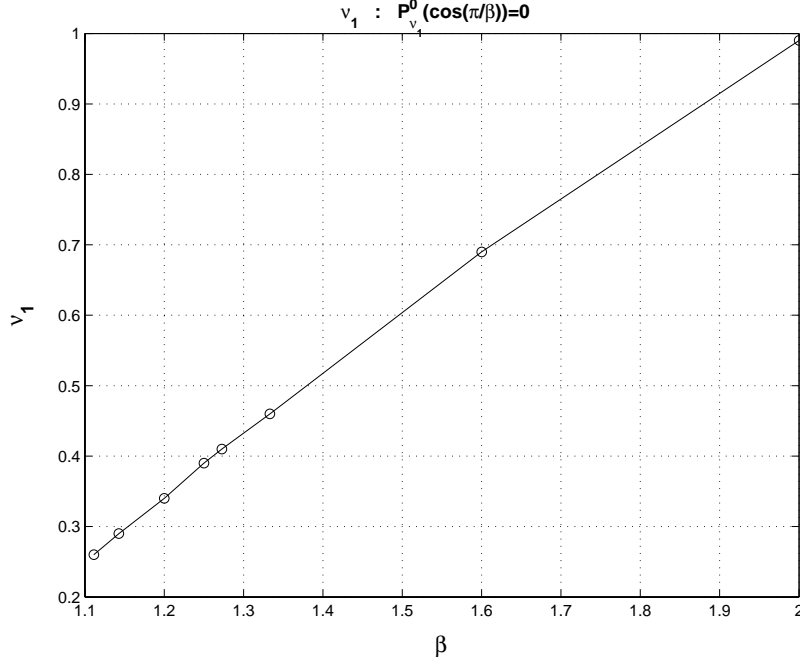


Figure 4.4: La trace de  $\nu_1$  en fonction de  $\beta$

A l'aide de Matlab, on peut chercher la valeur de  $\nu_1$  comprise entre 0 et 1, qui vérifie  $P_{\nu_1}^0(\cos(\pi/\beta)) = 0$  pour  $\beta$  donné. Pour des valeurs données de  $\omega$ , on a trouvé, cf. Figure 4.4.

- Remarque 4.3.2** 1. Une condition nécessaire sur  $\beta$  pour l'existence d'une valeur de  $\nu_1$  telle que:  $P_{\nu_1}^0(\cos(\pi/\beta)) = 0$ , est que  $\beta < \beta^* \approx 1.3771$ , la valeur exacte de  $\beta^*$  vérifie  $P_{1/2}^0(\cos(\pi/\beta^*)) = 0$ .
2. D'après la Figure 4.4, on constate que lorsque  $\omega > \pi$  croît, i.e  $\beta$  décroît, l'exposant de singularité  $\nu_1$  diminue. ■

### 4.3.2 Calcul du coefficient de singularité

Rappelons que le coefficient  $\mu_1$  est donné par (cf. Théorème 4.1.2):

$$\mu_1 = \frac{1}{(2\nu_1 + 1) \int_0^{\pi/\beta} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi} (f, w^*)_1, \quad (4.3.19)$$

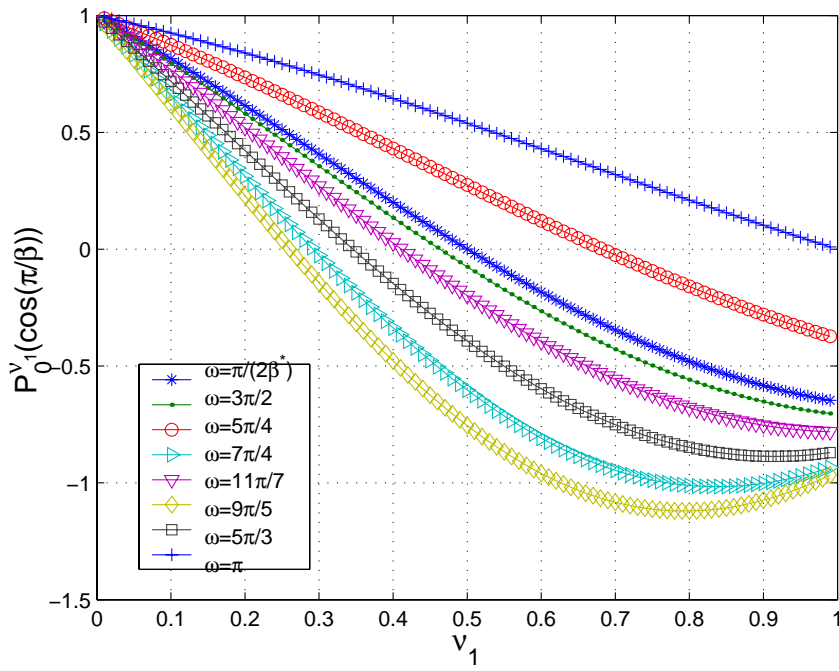


Figure 4.5: Les valeurs de  $\nu_1$

avec  $w^* = w_1^* + w_2^*$ , où  $w_1^*$  est donnée par:  $w_1^*(\rho, \varphi) = \rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi)$  et  $w_2^*$  est solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta_r w_2^* = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_2^* = -w_1^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial w_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial w_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.3.20)$$

Le calcul se fait en plusieurs étapes:

#### Etape 1: Calcul de $w_2^*$

1. **Calcul de la fonction de Legendre  $P_{\nu_1}^0(\cos \varphi)$ .** Pour  $\nu_1$  donné, on sait d'après [2], que l'on a:

$$u_1(\varphi) = P_{\nu_1}^0(\cos \varphi) = \frac{\sin \pi \nu_1}{\pi} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left( \frac{1}{\nu_1 - 1} - \frac{1}{\nu_1 + 1 + n} \right) P_n^0(\cos \varphi). \quad (4.3.21)$$

En utilisant Matlab, on peut calculer une valeur approchée de  $u_1(\varphi)$ , pour chaque  $\varphi$ .

2. **Calcul de la dérivée de la fonction de Legendre  $P_{\nu_1}^0(\cos \varphi)$ .** Pour  $\nu_1$  donné, on sait d'après 8.5.4 de [2], que:

$$(x^2 - 1) \frac{dP_{\nu_1}^0}{dx}(x) = \nu_1 x P_{\nu_1}^0(x) - \nu_1 P_{\nu_1-1}^0(x).$$

Ainsi

$$\frac{dP_{\nu_1}^0}{dx}(x) = \frac{\nu_1}{x^2 - 1} (x P_{\nu_1}^0(x) - P_{\nu_1-1}^0(x)). \quad (4.3.22)$$

Si on pose  $x = \cos \varphi$ , alors (4.3.22) devient

$$\frac{dP_{\nu_1}^0}{d\varphi}(\cos \varphi) = -\sin \varphi \frac{dP_{\nu_1}^0}{dx}(x) = -\frac{\nu_1}{\sin \varphi}(\cos \varphi P_{\nu_1}^0(\cos \varphi) - P_{\nu_1-1}^0(\cos \varphi)),$$

donc

$$\frac{du_1}{d\varphi}(\varphi) = -\sin \varphi \frac{dP_{\nu_1}^0}{d\varphi}(\cos \varphi) = \nu_1(\cos \varphi P_{\nu_1}^0(\cos \varphi) - P_{\nu_1-1}^0(\cos \varphi)).$$

**3. Calcul des données au bord.** Nous rappelons que:

$$\Gamma_D = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_N = \Gamma_N^0 \cup \Gamma_N^+, \text{ tel que } \Gamma_N^0 = \{(r, z) \in \Gamma_N : r = 0\}.$$

Sur  $\Gamma_D$ , on a

$$w_2^*(\rho, \varphi) = -w_1^*(\rho, \varphi) = -\rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi) = -(r^2 + z^2)^{\frac{-1-\nu_1}{2}} u_1(\arctan(-r/z)).$$

Sur  $\Gamma_N$ , on a

$$\frac{\partial w_2^*}{\partial n}(\rho, \varphi) = -\frac{\partial w_1^*}{\partial n}(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{\partial w_1^*}{\partial r}(\rho, \varphi) & \text{si } (\rho, \varphi) \in \Gamma_N^+, \\ -\frac{\partial w_1^*}{\partial r}(\rho, \varphi) & \text{si } (\rho, \varphi) \in \Gamma_N^0, \end{cases}$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^*}{\partial r}(\rho, \varphi) &= \frac{\partial w_1^*}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial w_1^*}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ &= \rho^{-2-\nu_1} \left( -(1 + \nu_1) \sin \varphi u_1(\varphi) + \cos \varphi \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}(\varphi) \right) \end{aligned}$$

**4. Calcul de  $w_2^*$ .** A l'aide de Matlab ou Gfem, on peut calculer une solution approchée de la solution  $w_2^*$  du problème (4.3.20).

**Etape 2: Calcul du produit scalaire  $(f, w^*)_1$ , avec  $f$  le second membre du problème (4.2.12)**

Posons:  $w_h^* = w_1^* + w_{2,h}^*$ , avec  $w_{2,h}^*$  solution approchée du problème (4.3.20), alors une valeur approchée du produit scalaire  $(f, w^*)_1$  est donnée par

$$(f, w_h^*)_1 = \int_{\Omega} f w_1^* r dr dz + \int_{\Omega} f w_{2,h}^* r dr dz.$$

La première intégrale du membre de droite peut se calculer explicitement, puisque  $f$  et  $w_1^*$  sont données. Par contre la deuxième intégrale est calculée numériquement, en utilisant la formule d'intégration suivante:

$$\int_T P(x) dx \approx \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 P(M_k^T)$$

$M_k^T$ ,  $k = 1, 3$  étant les milieux des côtés du triangle  $T$ .

### Etape 3: Calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{\beta}} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi \, d\varphi$

On sait calculer la fonction  $u_1(\varphi)$  pour chaque valeur de  $\varphi$ , donc à l'aide de la formule de trapèzes et de Matlab, il est facile de calculer cette intégrale.

### Test de validation

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à tester cette méthode du calcul de  $\mu_1$ , en prenant une fonction dont on connaît la valeur exacte de  $\mu_1$ .

**Remarque 4.3.3** *Le calcul du coefficient de singularité  $\mu_1$  nécessite le calcul de l'exposant de singularité  $\nu_1$ , cf. le paragraphe 4.3.1. ■*

Considérons la fonction singulière

$$u(\rho, \varphi) = S(\rho, \varphi) = \rho^{\nu_1} u_1(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\beta},$$

la valeur exacte de  $\mu_1$  est 1.

- **Problème équivalent.**  $u$  est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_r u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = S & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial S}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Pour un réel  $\delta > 0$ , considérons la fonction de troncature  $\phi$  définie par:

$$\phi(\rho) = 1, \quad \text{si } 0 < \rho < \delta \quad \text{et} \quad \phi(\rho) = 0, \quad \text{si } \rho > 2\delta.$$

Dans  $D = \{(\rho, \varphi), \delta < \rho < 2\delta \text{ et } 0 < \varphi < \frac{\pi}{\beta}\}$ ,  $\phi$  s'écrit

$$\phi(\rho) = \frac{1}{\delta^3}(\rho - 2\delta)(2\rho^2 - 5\rho\delta + 2\delta^2).$$

Posons  $v = u\phi$ , alors on a:

- Sur  $\Gamma_D^0$ , on a  $\varphi = \frac{\pi}{\beta}$ , donc  $S(\rho, \varphi) = \rho^{\nu_1} P_{\nu_1}(\cos(\pi/\beta)) = 0$  et  $v = 0$ .
- Sur  $\Gamma_N^0$ , on a  $\varphi = 0$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n}(\rho, \varphi) &= -\frac{\partial v}{\partial r}(\rho, \varphi) = -\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ &= -\left(\sin \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \phi(\rho) + u(\rho, \varphi) \phi'(\rho)\right) + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \phi(\rho)\right), \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho^{-1-\nu_1} \sin \varphi \frac{dP_{\nu_1}^0}{d\varphi}(\cos \varphi). \text{ Donc } \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

- Puisque  $\phi$  vaut 1 ou 0 en dehors de  $D$ , il est clair donc que  $v = 0$  sur  $\Gamma_D^1$  et  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N^+$ .



Ainsi,  $v$  est solution du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \Delta_r v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où  $f$  est la fonction définie par:  $f = -\Delta_r(S\phi)$ . Un calcul élémentaire nous donne

$$f(\rho, \varphi) = \begin{cases} g(\rho)u_1(\varphi) & \text{si } \delta < \rho < 2\delta, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

avec:  $g(\rho) = -\left(\phi''(\rho)\rho^{\nu_1} + 2(\nu_1 + 1)\phi'(\rho)\rho^{\nu_1-1}\right)$

- **Calcul numérique.** Soit  $w_{2,h}^*$  une solution approchée de problème (4.3.20) obtenue par un calcul éléments finis à l'aide de logiciel Matlab, cf. Figure 4.6

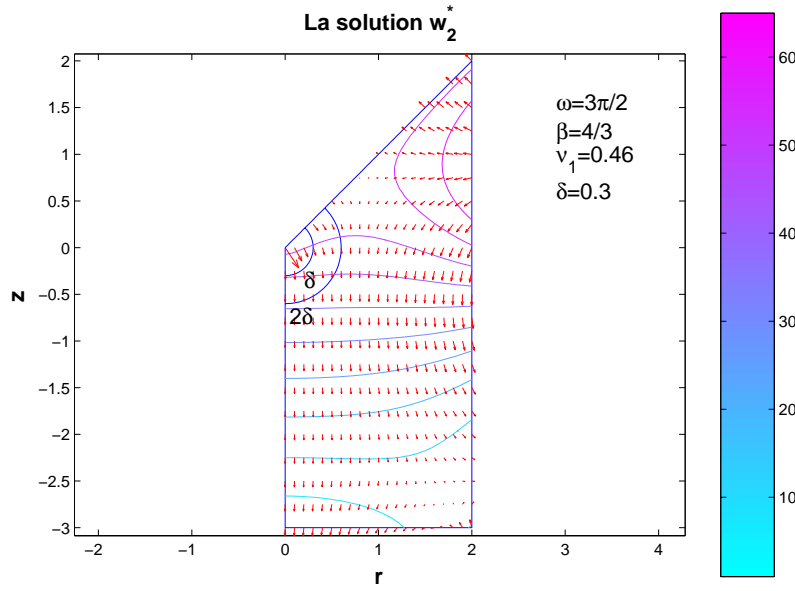


Figure 4.6: La solution  $w_2^*$

On a

$$\begin{aligned} (f, w_h^*)_1 &= \int_{\Omega} f w_1^* r dr dz + \int_{\Omega} f w_{2,h}^* r dr dz, \\ &= \left( \int_{\delta}^{2\delta} g(\rho) \rho^{1-\nu_1} d\rho \right) \cdot \left( \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} u_1^2(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 f(M_k^T) w_{2,h}^*(M_k^T) r(M_k^T) \right). \end{aligned}$$

$M_k^T$ ,  $k = 1, 3$  étant les milieux des côtés du triangle  $T$ .

On a effectué des tests pour plusieurs valeurs de  $\omega$  et on a trouvé les résultats suivants:

$\omega$	$3\pi/2$	$8\pi/5$	$7\pi/4$
$\nu_1$	0.46	0.39	0.29
$\mu_{1,h}$	0.9966	0.9944	0.9957

Table 4.2: Le coefficient  $\mu_{1,h}$

### 4.3.3 Calcul de la dérivée normale au milieu de l'arrondi

Rappelons que l'expression de la dérivée normale au milieu de l'arrondi est donnée par (cf. Théorème 4.2.1):

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) = \int_{\Omega} f v^* r \, dr \, dz. \quad (4.3.23)$$

avec  $v^* = v_1^* + v_2^*$ , où  $v_1^*$  est donnée par  $v_1^*(r, z) = \frac{z - z^*}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}}$  et  $v_2^*$  est solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^* &= 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_2^* &= g & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} &= k & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.3.24)$$

$f$  étant le second membre du problème d'origine.  
Ce calcul se fait en plusieurs étapes:

#### Etape 1: Calcul de $v_2^*$

1. **Calcul des données au bord.** Sur  $\Gamma_D$ , on a

$$g(r, z) = -v_1^*(r, z) = -\frac{z - z^*}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}}.$$

Sur  $\Gamma_N$ , on a

$$k(r, z) = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n}(r, z) = \begin{cases} \frac{\partial v_1^*}{\partial r}(r, z) & \text{si } (\rho, \varphi) \in \Gamma_N^+, \\ -\frac{\partial v_1^*}{\partial r}(r, z) & \text{si } (\rho, \varphi) \in \Gamma_N^0, \end{cases}$$

avec:

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial n}(r, z) = \frac{-3r(z - z^*)}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{5/2}}$$

2. **Calcul de  $v_2^*$ .** A l'aide de Matlab ou Gfem, on peut calculer une solution approchée de  $v_2^*$ .

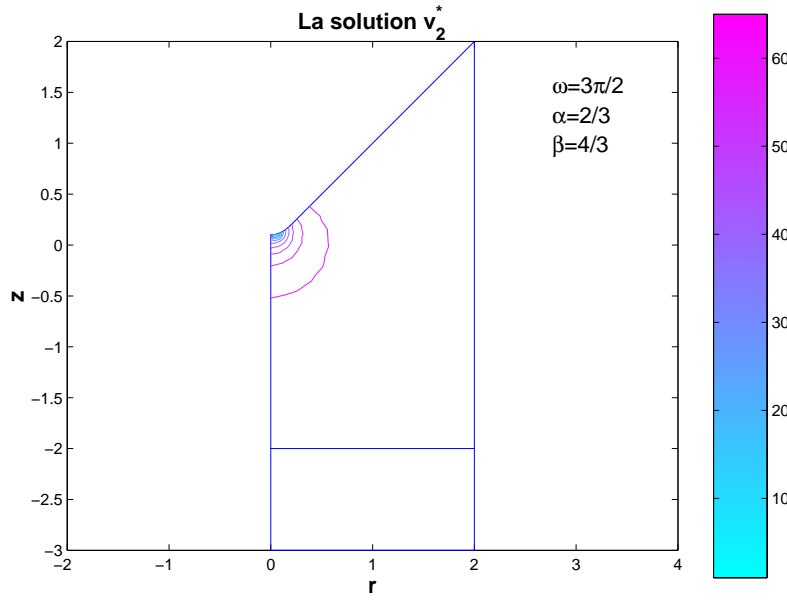


Figure 4.7: La solution  $v_2^*$

### Etape 2: Calcul de l'intégrale donnée par la formule 4.3.23

Posons:  $v_h^* = v_1^* + v_{2,h}^*$ , avec  $v_2^*$  solution approchée du problème (4.3.24), alors une valeur approchée de la dérivée normale au milieu de l'arrondi est donnée par

$$\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h = \int_{\Omega} f v_h^* r \, dr \, dz = \int_{\Omega} f v_1^* r \, dr \, dz + \int_{\Omega} f v_{2,h}^* r \, dr \, dz.$$

La première intégrale du membre droite peut se calculer explicitement, puisque  $f$  et  $v_1^*$  sont données. Par contre la deuxième intégrale est calculée numériquement, en utilisant l'une des deux formules d'intégrations suivantes:

$$\begin{aligned} \int_T P(x) \, dx &\approx \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 P(M_k^T), \\ \int_T P(x) \, dx &\approx \frac{\text{aire}(T)}{60} \left( 3 \sum_{k=1}^3 P(S_k^T) + 8 \sum_{k=1}^3 P(M_k^T) + 27P(G^T) \right). \end{aligned}$$

$S_k^T$ ,  $k = 1, 3$  sont les sommets de  $T$ ,  $M_k^T$ ,  $k = 1, 3$  sont les milieux des côtés et  $G^T$  est le centre de gravité, (cf. Figure 4.8). Remarquons que la formule (4.3.25) intègre exactement les polynômes de degré 2 et la formule (4.3.25) intègre exactement les polynômes de degré 3.

### Exemple de test

Considérons la fonction  $v_\epsilon$  de  $L_1^2(\Omega_\epsilon)$  définie par:

$$v_\epsilon(r, z) = \begin{cases} (z-a)^2(z-b) & a \leq z \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad . \quad \text{On a } -\Delta_r v_\epsilon = f_\epsilon := \begin{cases} -6z + 4a + 2b & a \leq z \leq b, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

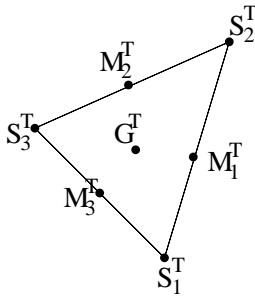


Figure 4.8: Le triangle  $T$

de plus,  $v_\epsilon$  et sa dérivée normale s'annulent respectivement sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ . Par conséquent,  $v_\epsilon$  est la seule solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_r v_\epsilon &= f_\epsilon & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_\epsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{N,\epsilon}. \end{cases}$$

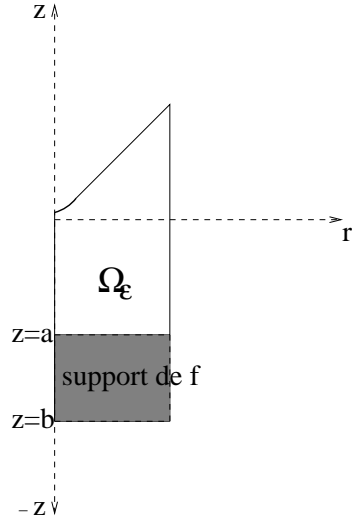


Figure 4.9: Le domaine  $\Omega_\epsilon$

Ainsi, une valeur approchée de  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)$  est donnée par

$$\left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h = \int_{\Omega} f v_1^* r \, dr \, dz + \int_{\Omega} f v_{2,h}^* r \, dr \, dz.$$

$v_{2,h}^*$  étant une solution approchée de  $v_2^*$  par un calcul éléments finis. Nous avons effectué des tests numériques pour le cas  $\omega = \frac{3}{2}\pi$  et nous avons obtenu pour  $a = -2$  et  $b = -3$  les résultats suivants:

$\epsilon$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon)$	0.0080	0.0053	0.0041	0.0034	0.0028

Table 4.3:  $\omega = \frac{3\pi}{2}$

On constate d'après le tableau ci-dessus que:

$$\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon)\right)_h \approx 0 = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon).$$

### Le problème modèle

Considérons le même domaine  $\Omega_\epsilon$  défini par la figure 4.9 et définissons les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  de  $L_1^2(\Omega)$  par:

$$f_1(r, z) = \begin{cases} \frac{2}{(a-b)^2} & \text{si } b \leq z \leq a, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(r, z) = \begin{cases} \frac{1}{(a-b)^2}(6y-4b) & \text{si } b \leq z \leq a, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

Notons  $v_{\epsilon,h}^1$  (resp.  $v_{\epsilon,h}^2$ ) la solution approchée du problème (4.2.12) avec le second membre  $\tilde{f}_1$  (resp.  $\tilde{f}_2$ ), avec  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  les prolongements respectifs de  $f_1$  et  $f_2$  à  $\Omega_\epsilon$  par zéro.

**Remarque 4.3.4** *Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont associées respectivement aux fonctions  $h_0 := 1$  et  $h_0 := z$ , où  $h_0$  est une fonction donnée sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma$ , (cf. Annexe 1) . ■*

Notons aussi:

$$c(\epsilon) = \epsilon^{\nu_1-1}, \quad c_h^i(\epsilon) = \left| \left( \frac{\partial v_{\epsilon,h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right|, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad d_h^i(\epsilon) = \frac{c_h^i(\epsilon)}{c(\epsilon)}.$$

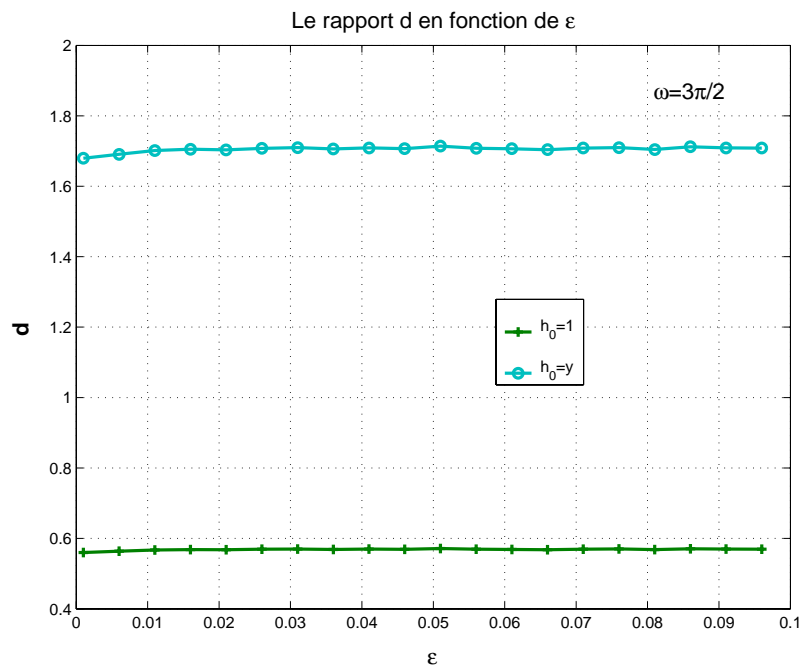


Figure 4.10: Le cas:  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

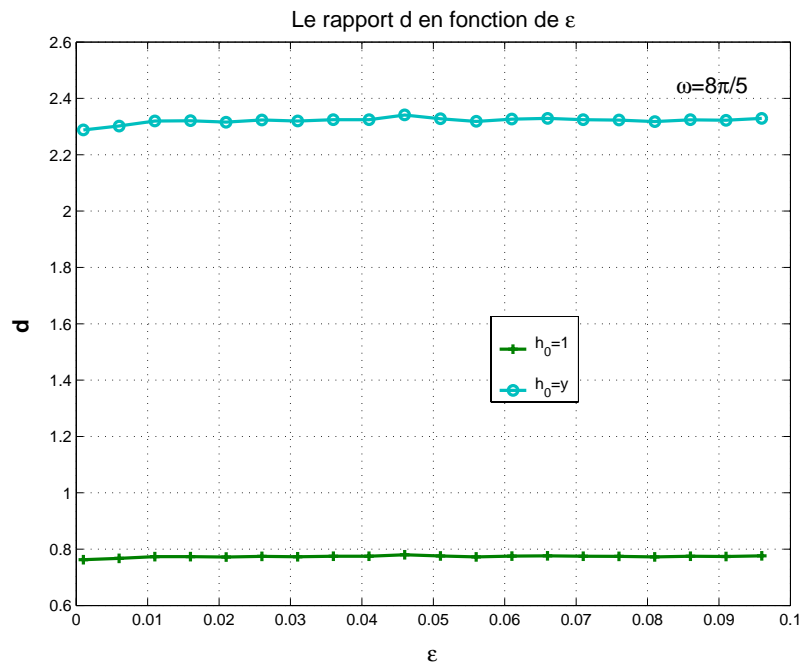


Figure 4.11: Le cas:  $\omega = \frac{8}{5}\pi$

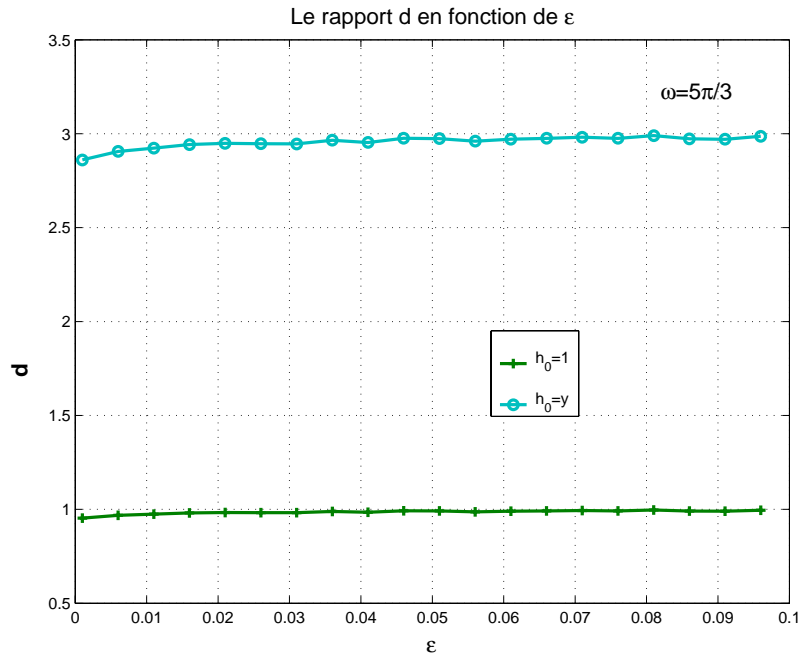


Figure 4.12: Le cas:  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

**Analyse des figures:** Les figures ci-dessous représentent la variation de  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ . On voit bien que lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro,  $d_i(\epsilon)$  est une constante. Donc on peut dire que  $c_h^i(\epsilon) \approx d_h^i \epsilon^{\nu_1-1}$ .

**Conclusion:**

Lorsque  $\epsilon$  très proche de zéro, il existe une constante  $d_h^i > 0$  telle que:

$$\left| \left( \frac{\partial v_{\epsilon,h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \approx d_h^i \epsilon^{\nu_1-1}, \quad i = 1, 2. \quad (4.3.25)$$





## Chapitre 5

Etude d'un problème elliptique  
axisymétrique en dimension trois,  
dans un domaine à singularité  
d'arête.

## 5.1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  tel que décrit par la figure 5.1, de bord  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ .  $\Omega$  est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$  (cf. Section 3.1).

On note  $\Omega$  une coupe de  $\Omega$ .

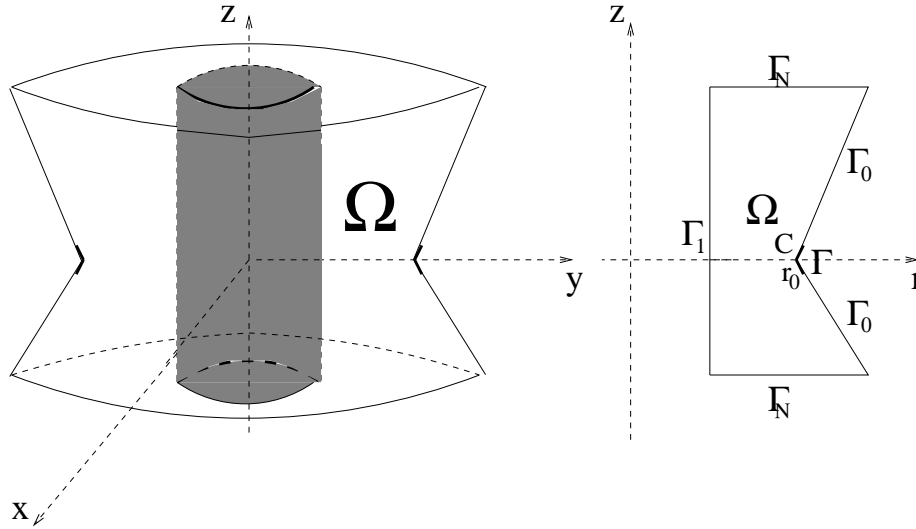


Figure 5.1: Le domaine d'étude

On note par  $(P)$  le problème mêlé pour le laplacien dans  $\Omega$ , de second membre  $f \in L^2(\Omega)$ , avec sur  $\Gamma_D$  la condition de Dirichlet homogène et sur  $\Gamma_N$  la condition de Neumann homogène.

La géométrie présente une singularité d'arête.

Supposons que le problème  $(P)$  est axisymétrique et considérons les coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ , on peut donc le réduire à un problème bidimensionnel  $(P)$  dans l'ouvert polygonal  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  défini par:  $\Omega = \{(r, z) / (r, z, \theta) \in \Omega, \forall \theta\}$  (cf. Figure 5.1).

Le problème  $(P)$  est donné par

$$\begin{cases} -\Delta_r u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où  $f$  est la restriction de  $f$  dans  $\Omega$  et  $\Delta_r$  l'opérateur défini par  $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

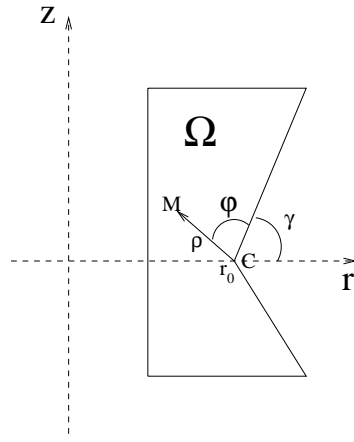


Figure 5.2: Les coordonnées polaires locales

## 5.2 Structure de la solution

### 5.2.1 Comportement de la solution au voisinage de singularité

Considérons  $\rho$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires locales centrées en  $C$ , cf Figure 5.2. On a :  $r = r_0 + \rho \cos(\varphi + \gamma)$  et  $z = \rho \sin(\varphi + \gamma)$ , avec  $\gamma = \frac{\pi - \omega}{2}$ .

Pour  $R > 0$ , définissons le domaine

$$D_R = \{(\rho, \varphi) \in \Omega, \text{ tel que } 0 < \rho < R\}.$$

$R$  est choisi de telle sorte que  $D_R$  ne contienne aucun autre sommet que  $C$ .

Notons aussi  $\eta$  une fonction de troncature dépendant seulement de  $\rho$  et qui vaut 1 dans  $D_R$ .

On a vu dans la section 3.4 que  $L_1^2(\Omega)$  peut se décomposer en une somme directe orthogonale de  $\text{Im } \Delta_r$  et d'un sous espace fermé  $L = (\text{Im } \Delta_r)^\perp$ :  $L_1^2(\Omega) = \text{Im } \Delta_r \oplus L$ . Dans la suite, on va caractériser le sous espace  $L$ .

**Lemme 5.2.1** *Un élément  $v$  de  $L$  vérifie  $\Delta_r v = 0$  au sens de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

**Preuve.** Pour tout  $w \in W$ , on a  $(v, \Delta_r w)_1 = 0$ , ce qui entraîne que  $(\Delta_r v, w)_1 = 0$  pour tout  $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ . ■

**Lemme 5.2.2** *Soit  $v \in L$ , il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $v - c\rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi) \in H^1(D_R)$ .*

**Preuve.** Puisque  $\Delta_r v = 0$  dans  $\Omega$ , on a

$$\Delta(\eta v) = (\Delta\eta)v + 2\nabla\eta \cdot \nabla v + \eta(\Delta v) = (\Delta\eta)v + 2\nabla\eta \cdot \nabla v - \frac{\eta}{r} \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Donc  $\Delta(\eta v)$  est dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Soit  $w \in H^1(\Omega)$  solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta w &= \Delta(\eta v) & \text{dans } \Omega, \\ w &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Posons  $v^* = \eta v - w$ ,  $v^*$  est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v^* &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ v^* &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v^*}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

D'après [27],  $v^*$  est une singularité duale cartésienne, cf. paragraphe 1.2.2; Donc il existe  $c \in \mathbb{R}$  et  $w^* \in H^1(\Omega)$  tels que:  $v^* = c\rho^{-\alpha} \sin(\alpha) + w^*$  dans  $D_R$  et par conséquent, il existe  $v_R \in H^1(D_R)$  tel que  $v = c\rho^{-\alpha} \sin(\alpha) + v_R$ .

D'où le résultat. ■

Posons  $S^*(\rho, \varphi) = \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)\eta(\rho)$ ,  $S^*$  vérifie:

1.  $\Delta_r S^* \in L_1^2(\Omega)$ , car  $\Delta_r S^* = \Delta S^* + \frac{1}{r} \frac{\partial S^*}{\partial r} \in L_1^2(D_R)$ .
2.  $S^* = 0$  sur  $\Gamma_D$  et  $\frac{\partial S^*}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ .

Soit  $w^* \in H_1^1(\Omega)$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_r w^* &= \Delta_r S^* & \text{dans } \Omega, \\ w^* &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial w^*}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Définissons  $u^* = S^* + w^*$ ,  $u^* \notin H_1^1(\Omega)$  vérifie:

$$\Delta_r u^* = 0, \quad u^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

**Définition 5.2.1** *L'élément  $u^*$  ainsi construit est appelé fonction singulière duale.* ■

**Lemme 5.2.3** *Le sous espace  $L$  de  $L_1^2(\Omega)$  est engendré par l'élément  $u^*$ .*

**Preuve.** Soit  $v \in L$ , posons  $w = v - \eta v$ . Il est clair que  $w \in H_1^1(\Omega)$ . D'après le lemme précédent  $v$  s'écrit:  $v = cS^* + v_R = c(u^* - w^*) + v_R$ , avec  $v_R$  dans  $H_1^1(\Omega)$ . Par conséquent  $v - cu^* \in H_1^1(\Omega)$ . Or  $v$  et  $u^*$  sont dans  $L$ , d'où  $v - cu^* = 0$ . ■

Posons  $S(\rho, \varphi) = \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)\eta(\rho)$ ,  $S$  vérifie:

1.  $S \notin H_1^2(\Omega)$ .
2.  $\Delta_r S \in L_1^2(\Omega)$ .
3.  $S = 0$  sur  $\Gamma_D$  et  $\frac{\partial S}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ .

**Définition 5.2.2** La fonction  $S$  s'appelle “fonction singulière attachée au coin  $C$ ”. ■

**Lemme 5.2.4** Il existe un élément  $w \in W$  et une constante  $c$  tels que:  $-\Delta_r(S+w) = cu^*$ .

**Preuve.** Le fait que  $S \notin H_1^2(\Omega)$  implique que l'élément  $-\Delta_r S \notin \text{Im } \Delta_r$ , donc il existe  $w \in W$ , tel que  $\Delta_r(S+w)$  est dans  $L \setminus \{0\}$ . Ainsi le lemme est démontré en vertu du lemme précédent. ■

**Proposition 5.2.1** Dans  $D_R$ , la solution  $v$  s'écrit:  $u = \lambda \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi) + u_R$ , où  $u_R \in H_1^2(D_R)$ .

**Preuve.**  $f$  étant dans  $L_1^2(\Omega)$ , il s'écrit:  $f = c'u^* - \Delta_r v_R$ , où  $v_R \in H_1^2(\Omega)$ . En vertu du lemme précédent, on peut écrire  $-\Delta_r u = -\frac{c'}{c}\Delta_r(S+w) - \Delta_r v_R$ . Par conséquent  $v = \lambda S + u_R$ , avec  $\lambda = \frac{c'}{c}$  et  $u_R = w + v_R$ . ■

**Définition 5.2.3** Le coefficient  $\lambda$  s'appelle “coefficient de singularité”. ■

## 5.2.2 Calcul du coefficient de singularité

Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que la solution  $v$  a un comportement singulier au voisinage du coin  $C$ , caractérisé par: l'exposant de singularité  $\alpha = \pi/\omega$ , la fonction singulière  $S = \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)\eta(\rho)$  et le coefficient de singularité noté  $\lambda$ .

Le but de ce paragraphe est d'établir une expression explicite pour calculer ce dernier.

### Expression explicite

Posons  $v_1^* = \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)$  et considérons  $v_2^*$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^* = -\Delta_r v_1^* & \text{dans } \Omega, \\ v_2^* = -v_1^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Posons  $v^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_2^*)$ . On a le théorème suivant:

**Théorème 5.2.1** *Le coefficient de singularité  $\lambda$  est donné par:*

$$\lambda = \frac{1}{r_0} \int_{\Omega} f v^* r dr dz. \quad (5.2.3)$$

**Preuve.** Pour un réel  $\delta > 0$  destiné à tendre vers zéro, posons

$$\Omega_{\delta} = \{(\rho, \varphi) \in \Omega, \rho > \delta\}.$$

Comme  $v^*$  est régulière dans  $\Omega_{\delta}$ , on a

$$- \int_{\Omega_{\delta}} f v^* r dr dz = \int_{\Omega_{\delta}} \Delta_r v v^* r dr dz = \int_{\partial\Omega_{\delta}} \left( \frac{\partial v}{\partial n} v^* - v \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) r d\sigma.$$

Compte tenu des conditions aux limites sur  $v$  et  $v^*$ , l'intégrale sur le bord se réduit à une intégrale sur l'arc de cercle  $\mathcal{C}_{\delta}$  de centre  $C$  et de rayon  $\delta$  contenu dans  $\Omega$ . Donc

$$- \int_{\Omega_{\delta}} f v^* r dr dz = \int_{\mathcal{C}_{\delta}} \left( \frac{\partial v}{\partial n} v^* - v \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) (r_0 + \delta \cos \varphi) d\sigma. \quad (5.2.4)$$

Utilisons les décompositions

$$v = \lambda S + v_R \text{ et } v^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_2^*), \quad v_R, v_2^* \in H_1^1(\Omega).$$

Reportons ces expressions dans le second membre de (5.2.4). Nous montrons facilement que les contributions venant de  $v_R$  et  $v_2^*$  tendent vers zéro avec  $\delta$ . Il reste le terme où interviennent  $S$  et  $v_1^*$ , or

1.  $\frac{\partial S}{\partial n} = -\frac{\partial S}{\partial \rho} = -\alpha \rho^{\alpha-1} \sin(\alpha\varphi),$
2.  $\frac{\partial}{\partial n}(\rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)) = -\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)) = \alpha \rho^{-\alpha-1} \sin(\alpha\varphi).$

Ainsi

$$- \int_{\Omega_{\delta}} f v^* r dr dz = -\frac{2}{\pi} \alpha \lambda \int_{\mathcal{C}_{\delta}} \delta^{-1} |\sin(\alpha\varphi)|^2 (r_0 + \delta \cos \varphi) \delta d\varphi.$$

Faisons tendre  $\delta$  vers zéro, nous obtenons

$$\int_{\Omega} f v^* r dr dz = \frac{2}{\pi} \alpha \lambda r_0 \int_0^{\omega} |\sin(\alpha\varphi)|^2 d\varphi = r_0 \lambda.$$

■

**Remarque 5.2.1** • On voit bien que  $\lambda$  dépend de  $r_0$  c-à-d le coin  $C$ .

- Le calcul de la solution  $v$  n'est pas nécessaire pour faire un calcul de  $\lambda$ . Ainsi pour un domaine donné  $\Omega$  le calcul de  $\lambda$  se fait indépendamment de la résolution du problème (5.2.2). Par conséquent, pour plusieurs seconds membres  $f$ , le calcul de  $\lambda$  ne dépend que de  $f$ . ■

## 5.3 Domaine arrondi et étude de la dérivée normale de la solution associée au milieu de l'arrondi

Notons  $\Omega_\epsilon$  le domaine obtenu de  $\Omega$  en arrondissant l'angle  $\omega$  par remplacer le segment  $\Gamma$  par une courbe régulière  $\Gamma_\epsilon$ . La frontière de  $\Omega_\epsilon$  est notée par  $\partial\Omega_\epsilon$ , (cf. Figure 5.3), où:

$$\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_{D,\epsilon} \cup \Gamma_N \text{ avec } \Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_{D,0,\epsilon} \cup \Gamma_1 \text{ tel que } \Gamma_{D,0,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_\epsilon.$$

Notons  $(P_\epsilon)$  le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_r v_\epsilon = \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

avec  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

Notons aussi  $C_\epsilon = (r_0 + r^*, 0)$  le milieu de l'arrondi  $\Gamma_\epsilon$  et remarquons que  $r^* = r^*(\epsilon)$  dépend essentiellement de  $\Gamma_\epsilon$ .

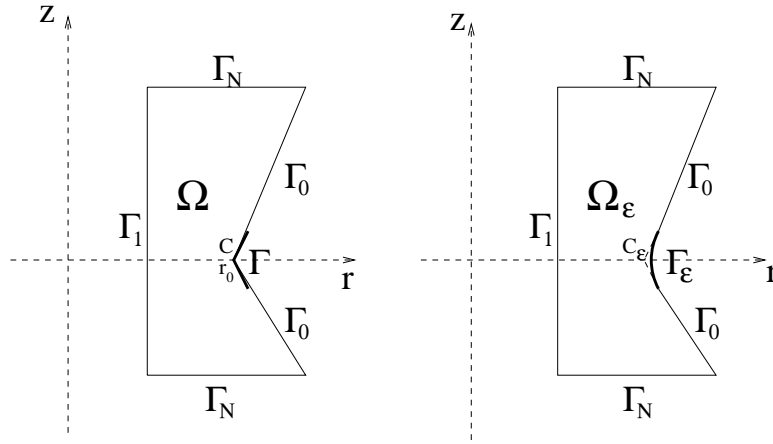


Figure 5.3: Le polygone  $\Omega$  et son arrondi

### 5.3.1 Expression de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi

Définissons la fonction

$$w_1^*(r, z) = \frac{r - r_0 - r^*}{(r - r_0 - r^*)^2 + z^2},$$

où  $r^* + r_0$  est l'abscisse du point intersection de  $\Gamma_\epsilon$  et  $(Or)$ , cf. Figure 5.4.

Il est clair que

$$\Delta_r w_1^* = \Delta w_1^* + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1^*}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w_1^*}{\partial r} \in L_1^2(\Omega).$$

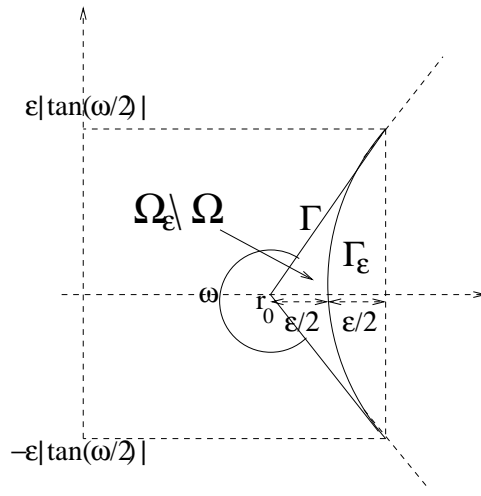


Figure 5.4: L'arrondi

Considérons les deux fonctions  $g$  et  $k$  définies par

$$g = -w_1^* \quad \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \quad k = -\frac{\partial w_1^*}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (5.3.6)$$

La forme géométrique de la courbe arrondie  $\Gamma_\epsilon$  qu'on a choisie est une parabole d'équation

$$r = \varphi(z) = \frac{c_\omega}{\epsilon} z^2 + r_0 + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{avec } c_\omega = \frac{1}{2 \tan^2(\frac{\omega}{2})}.$$

Dans ce cas  $r^* = \frac{\epsilon}{2}$ .

Définissons la fonction  $\psi$  sur  $] -\epsilon |\tan(\omega/2)|, \epsilon |\tan(\omega/2)|[$  par

$$\psi(z) = w_1^*(\varphi(z), z) = \frac{c_\omega \epsilon}{c_\omega^2 z^2 + \epsilon^2}.$$

**Proposition 5.3.1** *La fonction  $g$  définie par (5.3.6) est dans  $H_1^{\frac{3}{2}}(\Gamma_\epsilon)$ , et on a*

1.  $\|g\|_{\frac{1}{2}, 1, \Gamma_\epsilon} = O(\frac{1}{\epsilon^{3/2}}).$
2.  $\|g\|_{\frac{3}{2}, 1, \Gamma_\epsilon} = O(\frac{1}{\epsilon^{5/2}}).$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle utilisée pour la proposition 2.4.1. ■

**Proposition 5.3.2** *On a*

1.  $\|g\|_{0, 1, \partial\Omega_\epsilon} = O(1/\epsilon).$
2.  $\|k\|_{0, 1, \partial\Omega_\epsilon} = O(1/\epsilon^2).$



**Preuve.** La démonstration est identique à celle utilisée pour la proposition 2.4.2. ■

Considérons alors  $w_2^*$  la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_r w_2^* = -\Delta_r w_1^* & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ w_2^* = -w_1^* & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial w_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial w_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

**Proposition 5.3.3** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|w_2^*\|_{1,1,\Omega_\epsilon} \leq \frac{c}{\epsilon^{3/2}}. \quad (5.3.7)$$

**Preuve.** D'après la formule de Green, on a:

$$\|\nabla w_2^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon}^2 = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial w_2^*}{\partial n} w_2^* r \, d\Gamma.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que:

$$\|\nabla w_2^*\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 \leq \|k\|_{0,1,\partial\Omega_\epsilon} \|g\|_{0,1,\partial\Omega_\epsilon}.$$

En utilisant la proposition précédente, la proposition est démontrée. ■

Posons enfin  $w^* = \frac{1}{\pi}(w_1^* + w_2^*)$ .

Pour un réel  $\delta > 0$  destiné à tendre vers zéro, considérons le sous domaine  $\Omega_\delta$  intersection de  $\Omega_\epsilon$  et le disque ouvert  $\mathcal{D}_\delta$  de centre  $C_\epsilon$  et de rayon  $\delta$ , notons  $\partial\Omega_\delta$  sa frontière et  $\Gamma_\delta = \partial\Omega_\delta \cap \partial\mathcal{D}_\delta$ .

Tout d'abord nous démontrons le lemme suivant:

**Lemme 5.3.1** *On a*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta = -\pi(r_0 + r^*) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon). \quad (5.3.8)$$

**Preuve.**  $v_\epsilon$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Gamma_\delta$ , donc par application de la formule de Taylor, pour tout  $(x, y, z) \in \Gamma_\delta$ , on a

$$v_\epsilon(r, z) = u_\epsilon(C_\epsilon) + \frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(C_\epsilon)(r - r_0 - r^*) + \frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(C_\epsilon)z + O(\delta^2),$$

or  $v_\epsilon(C_\epsilon) = 0$ , donc  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(C_\epsilon) = 0$  d'où  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial z}(C_\epsilon) = 0$  et par conséquent  $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(C_\epsilon)$ . Comme  $r - r_0 - r^* = \delta \cos \theta$ , donc  $v_\epsilon$  s'écrit sur  $\Gamma_\delta$ :

$$v_\epsilon(r, z) = \delta \cos \theta \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) + O(\delta^2).$$

On a encore

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(r, z) = -\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \rho}(r, z) = -\cos \varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(r, z) = -\cos \varphi \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial r}(C_\epsilon) + O(\delta) \right) = -\cos \varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) + O(\delta).$$

Par conséquent

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} = -\frac{2}{\delta} \cos^2 \varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) + O(1).$$

Comme  $d\Gamma_\delta = \delta \, d\varphi$  et  $r = r_0 + r^* + \delta \cos \varphi$ . Donc

$$\int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta = - \int_{\Gamma_\delta} \left( 2(r_0 + r^*) \cos^2 \varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) + 2\delta \cos^3 \varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) + O(\delta^2) \right) d\varphi,$$

donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta = -2(r_0 + r^*) \int_0^\pi \cos^2 \varphi \, d\varphi \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) = -\pi(r_0 + r^*) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon).$$

■

**Théorème 5.3.1** On a

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) = \frac{1}{r_0 + r^*} \int_\Omega f w^* r \, dr \, dz. \quad (5.3.9)$$

**Preuve.** Il est facile de prouver que

$$- \int_{\Omega_\delta} \Delta_r v_\epsilon w^* r \, dr \, dz = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta,$$

et d'utiliser le lemme précédent. ■

### 5.3.2 Estimation d'erreur entre la valeur exacte et la valeur approchée

Posons:

$$\left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) \right)_h = \int_{\Omega_\epsilon} f w_h^* dx, \quad \text{avec } w_h^* = \frac{1}{\pi} (w_1^* + w_{2,h}^*).$$

**Lemme 5.3.2** Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que:

$$\|w_2^* - w_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon} \leq C h^2 \epsilon^{-5/2}. \quad (5.3.10)$$

**Preuve.** On sait que

$$\|w_2^* - w_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon} \leq C h^2 |w_2^*|_{2,1,\Omega_\epsilon}.$$

Or

$$|w_2^*|_{2,1,\Omega_\epsilon} \leq c \|w_2^*\|_{3/2,1,\partial\Omega_\epsilon} \quad \text{et} \quad \|w_2^*\|_{3/2,1,\partial\Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{-5/2}), \quad \text{d'après la proposition 5.3.1}$$

d'où le résultat.

■

**Proposition 5.3.4** *Il existe une constante  $C$  strictement positive indépendante de  $h$  telle que:*

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \leq Ch^2 \epsilon^{-5/2} \|f\|_{0,1,\Omega}.$$

**Preuve.** On a

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| = \left| \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{f}(w_2^* - w_{2,h}^*) dx \right| \leq \|f\|_{0,1,\Omega} \|w_2^* - w_{2,h}^*\|_{0,1,\Omega_\epsilon}.$$

Ainsi, la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent. ■

**Remarque 5.3.1** *Si  $\epsilon = h^{4/5}$ , alors l'estimation précédente devient:*

$$\left| \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) - \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| \leq C \|f\|_{0,1,\Omega}. \blacksquare$$

### 5.3.3 Résultats numériques

Soient  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  les fonctions associées respectivement aux fonctions  $h_0 := 1$ ,  $h_0 := r + 1$ ,  $h_0 := (r + 1)^2$  et  $h_0 := \exp(r)$ , où  $h_0$  est une fonction donnée sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma$  (cf. Annexe 1).

Pour tous les tests numériques, nous considérons les dimensions de la géométrie suivantes:  $a = 3$ ,  $b = 2$ .

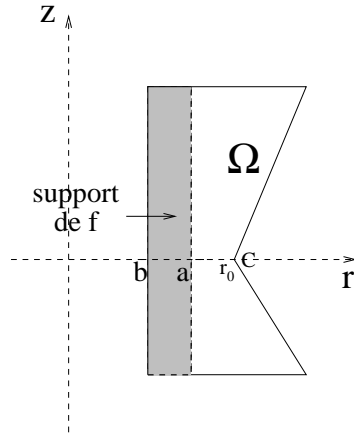


Figure 5.5: Le domaine  $\Omega$

Notons  $v_{\epsilon,h}^i$ ,  $i = 1, 4$  la solution approchée du problème (4.2.12) avec le second membre  $\tilde{f}_i$ , avec  $\tilde{f}_i$  les prolongements de  $f_i$ ,  $i = 1, 4$  à  $\Omega_\epsilon$  par zéro. Notons aussi:

$$c(\epsilon) = \epsilon^{\alpha-1}, \quad c_h^i(\epsilon) = \left| \left( \frac{\partial v_{\epsilon,h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right|, \quad i = 1, 4 \quad \text{et} \quad d_h^i(\epsilon) = \frac{c_h^i(\epsilon)}{c(\epsilon)}.$$

Ainsi

$$\left| \left( \frac{\partial v_\epsilon^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| = d_h^i(\epsilon) \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2. \quad (5.3.11)$$

On souhaite dans la suite caractériser le rapport  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ .

Pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$ , on calcule une valeur approchée de  $d_h^i(\epsilon)$ ,  $i = 1, 2$  et on trace la courbe qui présente la variation de ces valeurs en fonction de  $\epsilon$ .

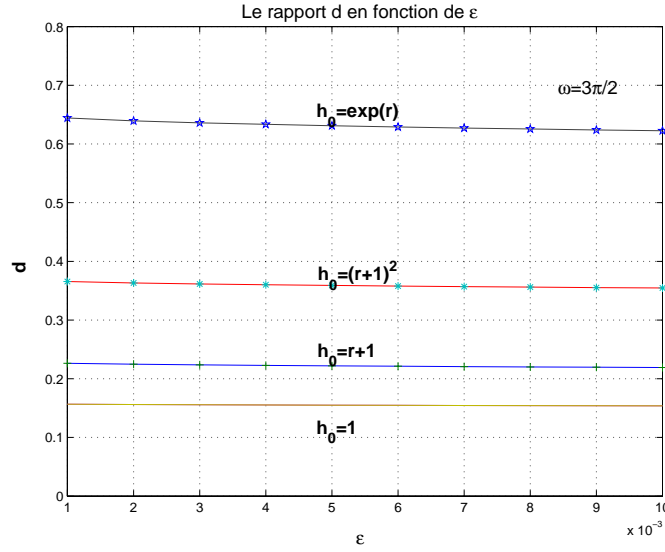


Figure 5.6:  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

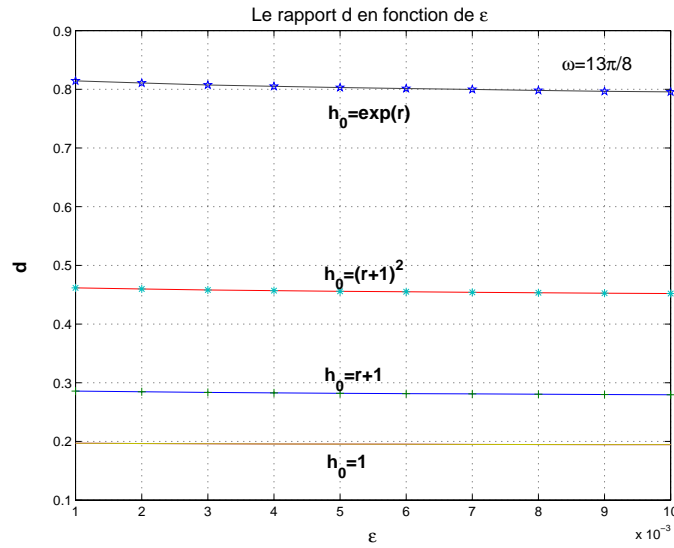


Figure 5.7:  $\omega = \frac{13}{8}\pi$

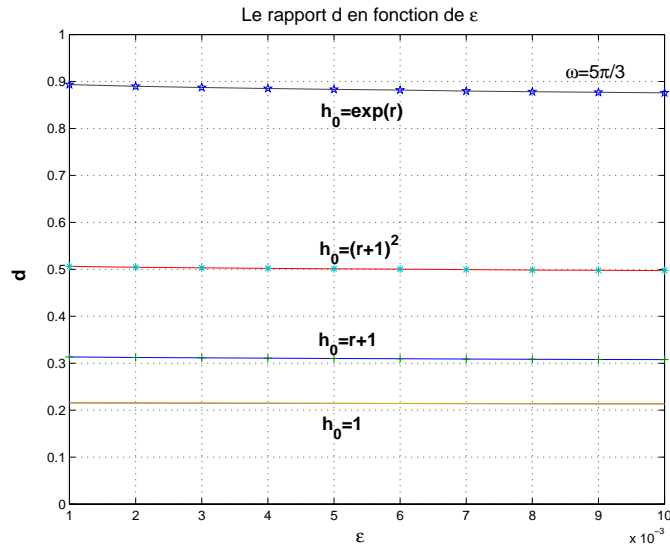


Figure 5.8:  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

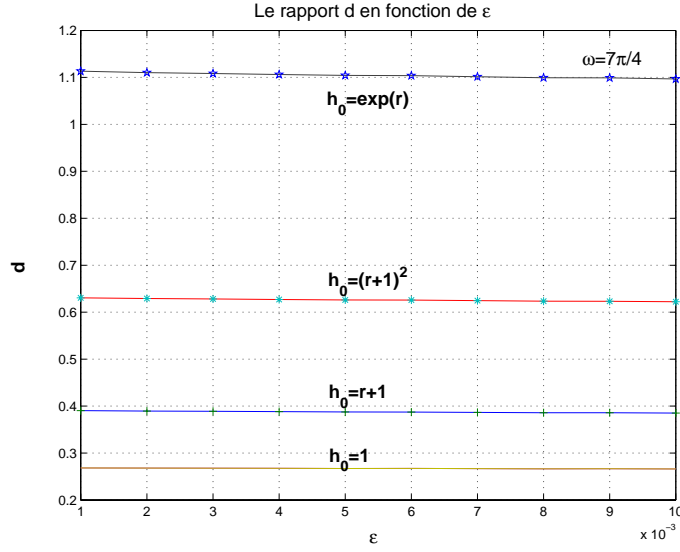


Figure 5.9:  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

**Analyse des figures:** Les figures ci-dessus représentent la variation de  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ . On voit bien que lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro,  $d_i(\epsilon)$  est une constante. Donc on peut dire que  $c_h^i(\epsilon) \approx d_h^i \epsilon^{\alpha-1}$ .

### Conclusion:

Lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro, il existe une constante  $d_h^i > 0$ , indépendante de  $\epsilon$  telle que:

$$\left( \left| \frac{\partial v_{\epsilon,h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right| \right) \approx d_h^i \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2. \quad (5.3.12)$$

$h_0$	1	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$exp(r)$
$d$	0.2279	0.3682	0.1593	0.6493

Table 5.1: Le cas  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

$h_0$	1	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$exp(r)$
$d$	0.2870	0.4005	0.1989	0.8182

Table 5.2: Le cas  $\omega = \frac{13}{8}\pi$

$h_0$	1	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$exp(r)$
$d$	0.3146	0.5081	0.2176	0.8970

Table 5.3: Le cas  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

$h_0$	1	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$exp(r)$
$d$	0.3914	0.6320	0.2699	1.1163

Table 5.4: Le cas  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

### Etude de la constante $d$

**Remarque 5.3.2** *On constate d'après les tableaux ci-dessus que, pour un domaine  $\Omega$  donné, la constante  $d$  varie avec  $h_0$ . ■*

$h_0$	1	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$
$d(2/3, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.582	0.582	0.590	0.581
$d(8/13, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.733	0.733	0.736	0.732
$d(3/5, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.803	0.803	0.806	0.803

Table 5.5: Dépendance de  $d$  à  $h_0$

$\omega$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$5\pi/3$	$7\pi/4$
$d(\alpha, r + 1) / d(\alpha, 1)$	1.615	1.614	1.615	1.615
$d(\alpha, (r + 1)^2) / d(\alpha, 1)$	0.698	0.693	0.691	0.689
$d(\alpha, (r + 1)^3) / d(\alpha, 1)$	2.849	2.850	2.851	2.852

Table 5.6: Dépendance de  $d$  à  $\alpha$

On constate d'après les tables ci-dessus que, si on note la constante  $d$  par  $d(\alpha, h_0)$ , alors on a une relation de la forme:

$$d(\alpha, h_0) = KF(\alpha)G(h_0), \quad (5.3.13)$$

avec:

- $K$  une constante qu'on précisera,
- $F$  une fonction dépendant seulement de  $\alpha$ ,
- $G$  une fonction dépendant seulement de  $h_0$ .

En effet:

D'après la table 5.5, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(4/7, h_0)$  est une constante indépendante de  $h_0$ , il dépend donc seulement de  $\alpha$ , notons ce rapport par  $F(\alpha)$ . De même, d'après la table 5.6, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(\alpha, 1)$  est une constante indépendante de  $\alpha$ , il dépend seulement donc de  $h_0$ , notons ce rapport par  $G(h_0)$ . Ainsi

$$d(\alpha, h_0) = F(\alpha)d(4/7, h_0) = F(\alpha)G(h_0)d(4/7, 1).$$

Où  $K$  est la constante  $d(4/7, 1)$ .

## 5.4 Un autre problème modèle

### 5.4.1 Position du problème

Dans cette section, on considère la géométrie  $\Omega$ , décrite par la figure 5.10 (cf. section 3.1.2), de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , où  $\Gamma_D = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  porte la condition de Dirichlet et  $\Gamma_N$  porte celle de Neumann.

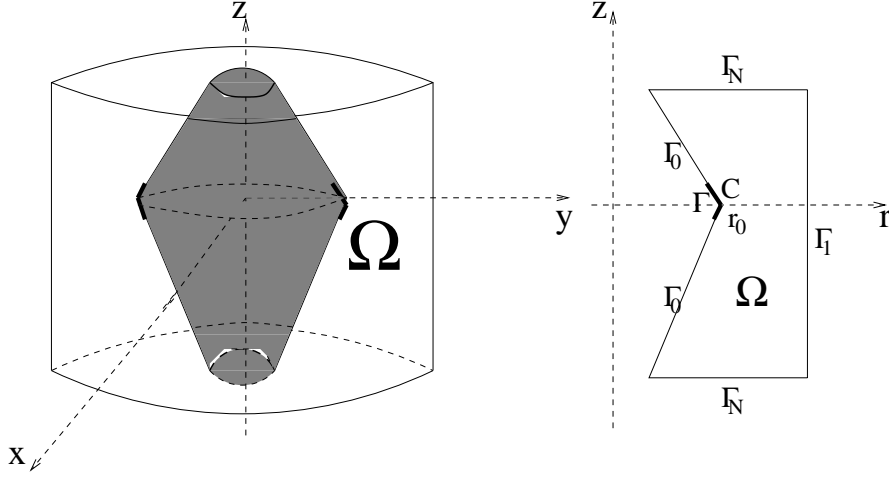


Figure 5.10: Le domaine d'étude

**Remarque 5.4.1** *Nous supposons que le polygone  $\Omega$  est contenu dans  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . ■*

Considérons les nouvelles coordonnées polaires locales  $\rho$  et  $\varphi$  centrées en  $C$ , cf. Figure 5.11. On a:  $r + r_0 = \rho \cos(\varphi - \gamma)$  et  $z = \rho \sin(\varphi - \gamma)$ , avec  $\gamma = \pi - \frac{\omega}{2}$ .

Nous allons refaire l'étude déjà faite pour la géométrie décrite par la figure 5.3; nous établirons la même expression pour le coefficient de singularité et une formule modifiée pour la dérivée normale de la solution associée au milieu de l'arrondi.

### 5.4.2 Coefficient de singularité

Nous rappelons l'expression du coefficient de singularité établie précédemment.

**Théorème 5.4.1** *Le coefficient de singularité  $\lambda$  est donné par:*

$$\lambda = \frac{1}{r_0} \int_{\Omega} f v^* r dr dz. \quad (5.4.14)$$

**Preuve.** cf. la démonstration du théorème 5.2.1. ■



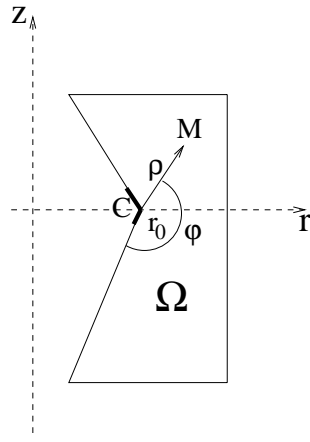


Figure 5.11: Le domaine d'étude

Avec:

1.  $v_1^* = \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)$ .
2.  $v_2^*$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_r v_2^* = -\Delta_r v_1^* & \text{dans } \Omega, \\ v_2^* = -v_1^* & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial v_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

$$3. v^* = \frac{1}{\pi}(v_1^* + v_2^*).$$

### 5.4.3 Domaine arrondi et problème associé

Notons  $\Omega_\epsilon$  le domaine obtenu de  $\Omega$  en remplaçant le segment  $\Gamma$  par une courbe régulière  $\Gamma_\epsilon$ . La frontière de  $\Omega_\epsilon$  est notée par  $\partial\Omega_\epsilon$ , (cf. Figure .5.12), où:

$$\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_{D,\epsilon} \cup \Gamma_N \text{ avec } \Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_{D,0,\epsilon} \cup \Gamma_{D,1} \text{ tel que } \Gamma_{D,0,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_\epsilon.$$

Notons  $(P_\epsilon)$  le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_r v_\epsilon = \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ v_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

avec  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

Notons aussi  $C_\epsilon = (r_0 - r^*, 0)$  le milieu de l'arrondi  $\Gamma_\epsilon$  et remarquons que  $r^* = r^*(\epsilon)$  dépend essentiellement de  $\Gamma_\epsilon$ .

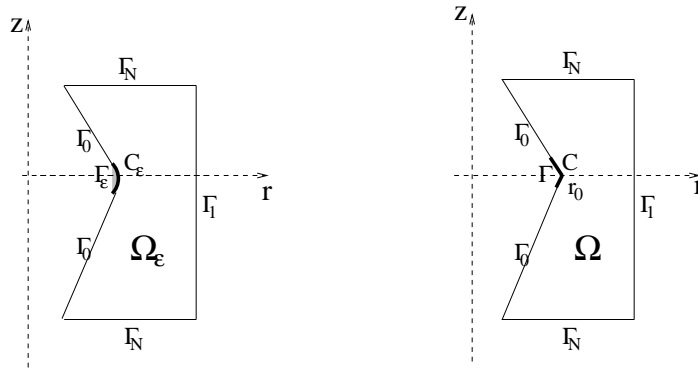


Figure 5.12: Le polygone  $\Omega$  et son arrondi

#### 5.4.4 Expression de la dérivée normale de la solution au milieu de l'arrondi

Définissons la fonction

$$w_1^*(r, z) = \frac{r - r_0 + r^*}{(r - r_0 + r^*)^2 + z^2},$$

Il est clair que

$$\Delta_r w_1^* = \Delta w_1^* + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1^*}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w_1^*}{\partial r} \in L_1^2(\Omega).$$

De plus, la trace de  $w_1^*$  et de sa dérivée normale sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  respectivement sont bien définies.

Considérons alors  $w_2^*$  la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_r w_2^* = -\Delta_r w_1^* & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ w_2^* = -w_1^* & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial w_2^*}{\partial n} = -\frac{\partial w_1^*}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Enfin, posons  $w^* = \frac{1}{\pi}(w_1^* + w_2^*)$ .

Pour un réel  $\delta > 0$  destiné à tendre vers zéro, considérons le sous domaine  $\Omega_\delta$  intersection de  $\Omega_\epsilon$  et le disque ouvert  $\mathcal{C}_\delta$  de centre  $C_\epsilon$  et de rayon  $\delta$ , notons  $\partial\Omega_\delta$  sa frontière et  $\Gamma_\delta = \partial\Omega_\delta \cap \partial\mathcal{C}_\delta$ .

Tout d'abord nous démontrons le lemme suivant:

**Lemme 5.4.1** *On a*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta = -\pi(r_0 - r^*) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon). \quad (5.4.15)$$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle du lemme 5.3.1. ■

**Théorème 5.4.2** On a

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial n}(C_\epsilon) = \frac{1}{r_0 - r^*} \int_{\Omega} f w^* r \, dr \, dz. \quad (5.4.16)$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que

$$- \int_{\Omega_\delta} \Delta_r v_\epsilon w^* r \, dr \, dz = - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_\delta} \left( \frac{\partial v_\epsilon}{\partial n} w_1^* - v_\epsilon \frac{\partial w_1^*}{\partial n} \right) r \, d\Gamma_\delta,$$

et d'utiliser le lemme précédent. ■

### 5.4.5 Résultats numériques

Soient  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  les fonctions associées respectivement aux fonctions  $h_0 := 1$ ,  $h_0 := r + 1$ ,  $h_0 := (r + 1)^2$  et  $h_0 := \exp(r)$ , où  $h_0$  est une fonction donnée sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma$ , cf. Annexe 1.

Pour tous les tests numériques, nous considérons les dimensions géométrique suivantes:  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $y =, y =$ .

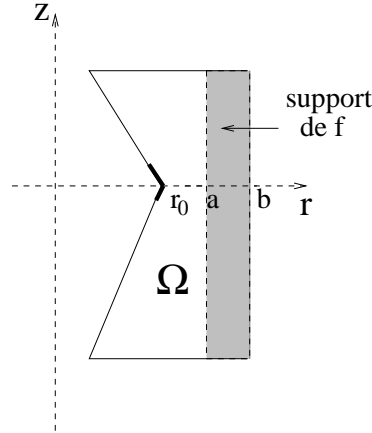


Figure 5.13: Le domaine  $\Omega$

Notons  $u_{\epsilon,h}^i$ ,  $i = 1, 4$  la solution approchée du problème (4.2.12) avec  $\tilde{f}_i$  le second membre,  $\tilde{f}_i$  les prolongements de  $f_i$ ,  $i = 1, 4$  à  $\Omega_\epsilon$  par zéro.

Notons aussi:

$$c(\epsilon) = \epsilon^{\alpha-1}, \quad c_h^i(\epsilon) = \left| \left( \frac{\partial v_{\epsilon,h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right) \right|, \quad i = 1, 4 \text{ et } d_h^i(\epsilon) = \frac{c_h^i(\epsilon)}{c(\epsilon)}.$$

Ainsi

$$\left| \left( \frac{\partial v_\epsilon^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right)_h \right| = d_h^i(\epsilon) \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 4. \quad (5.4.17)$$

On souhaite dans la suite caractériser le rapport  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ .

Pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$ , on calcule une valeur approchée de  $d_h^i(\epsilon)$ ,  $i = 1, 4$  et on trace la courbe qui présente la variation de ces valeurs en fonction de  $\epsilon$ .

**Analyse des figures:** Les figures ci-dessous représentent la variation de  $d_h^i(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ . On voit bien que lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro,  $d_i(\epsilon)$  est une constante. Donc on peut dire que  $c_h^i(\epsilon) \approx d_h^i \epsilon^{\alpha-1}$ .

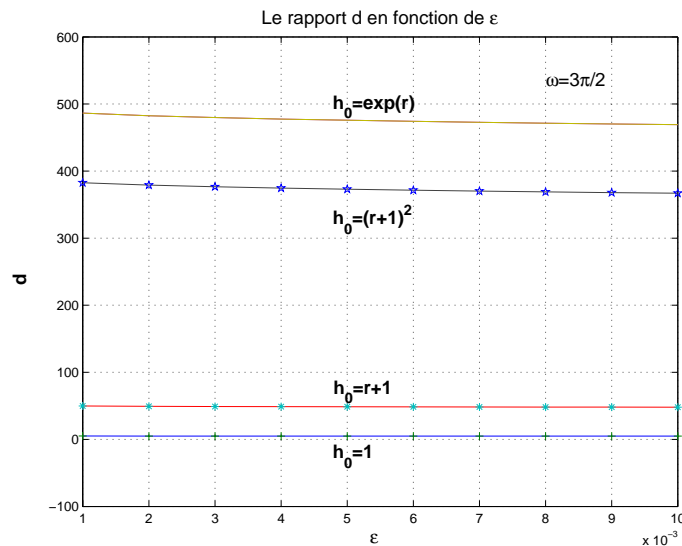


Figure 5.14:  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

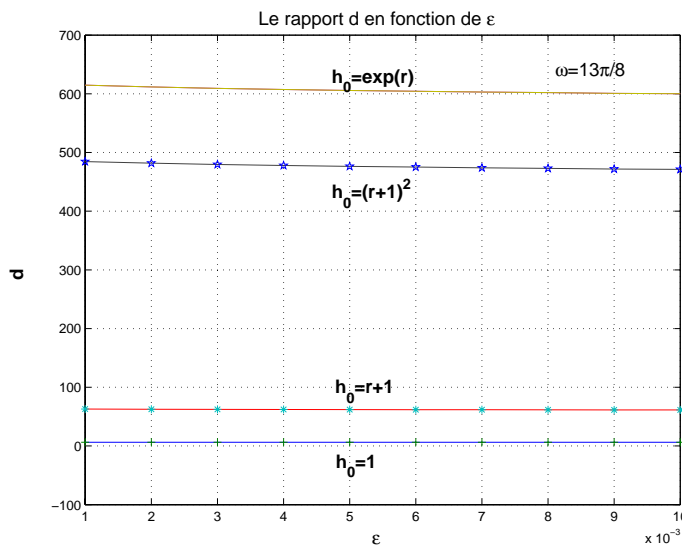


Figure 5.15:  $\omega = \frac{13}{8}\pi$

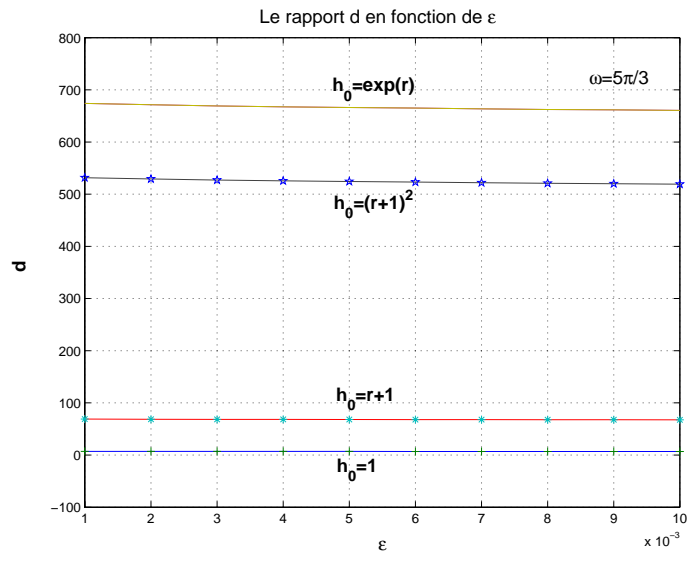


Figure 5.16:  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

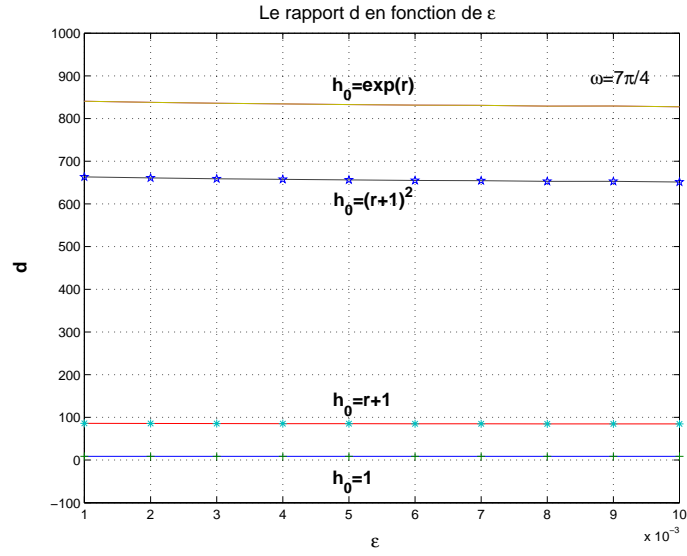


Figure 5.17:  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

### Conclusion:

Lorsque  $\epsilon$  est très proche de zéro, il existe une constante  $d_h^i > 0$  telle que:

$$\left| \left( \frac{\partial v_{\epsilon, h}^i}{\partial n}(O_\epsilon) \right) \right| \approx d_h^i \epsilon^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2. \quad (5.4.18)$$

$h_0$	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$	$exp(r)$
$d$	5.0907	50.1531	490.4008	386.2072

Table 5.7: Le cas  $\omega = \frac{3}{2}\pi$

$h_0$	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$	$exp(r)$
$d$	6.4099	63.1531	617.5482	487.1108

Table 5.8: Le cas  $\omega = \frac{13}{8}\pi$

$h_0$	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$	$exp(r)$
$d$	7.0249	69.2130	676.8136	534.0400

Table 5.9: Le cas  $\omega = \frac{5}{3}\pi$

$h_0$	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$	$exp(r)$
$d$	8.7501	86.2118	843.0551	665.5529

Table 5.10: Le cas  $\omega = \frac{7}{4}\pi$

### Etude de la constante $d$

**Remarque 5.4.2** *On constate d'après les tableaux ci-dessus que, pour un domaine  $\Omega$  donné la constante  $d$  varie avec  $h_0$ . ■*

On constate d'après les tables ci-dessus que, si on note la constante  $d$ , par  $d(\alpha, h_0)$ , alors, on a une relation de la forme:

$$d(\alpha, h_0) = KF(\alpha)G(h_0), \quad (5.4.19)$$

avec:

- $K$  une constante qu'on précisera,
- $F$  une fonction dépendant seulement de  $\alpha$ ,

$h_0$	$r + 1$	$(r + 1)^2$	$(r + 1)^3$	$\exp(r)$
$d(2/3, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.581	0.581	0.581	0.580
$d(8/13, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.732	0.732	0.732	0.731
$d(3/5, h_0) / d(4/7, h_0)$	0.802	0.802	0.802	0.802

Table 5.11: Dépendance de  $d$  à  $h_0$

$\omega$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$5\pi/3$	$7\pi/4$
$d(\alpha, (r + 1)^2) / d(\alpha, r + 1)$	9.851	9.852	9.852	9.852
$d(\alpha, (r + 1)^3) / d(\alpha, r + 1)$	96.332	96.342	96.344	96.348
$d(\alpha, \exp(r)) / d(\alpha, r + 1)$	75.865	75.993	76.021	76.062

Table 5.12: Dépendance de  $d$  à  $\alpha$

- $G$  une fonction dépendant seulement de  $h_0$ .

En effet:

D'après la table 5.9, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(4/7, h_0)$  est une constante indépendante de  $h_0$ , il dépend donc seulement de  $\alpha$ , notons ce rapport par  $F(\alpha)$ . De même, d'après la table 5.10, le rapport  $d(\alpha, h_0)/d(\alpha, r + 1)$  est une constante indépendante de  $\alpha$ , il dépend seulement donc de  $h_0$ , notons ce rapport par  $G(h_0)$ . Ainsi

$$d(\alpha, h_0) = F(\alpha)d(4/7, h_0) = F(\alpha)G(h_0)d(4/7, r + 1),$$

avec  $K$  est la constante  $d(4/7, r + 1)$ .





## Partie III

Comparaison en norme des solutions  
du laplacien dans les domaines avec  
angle vif et arrondi



# Introduction

Soient un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  présentant une singularité conique et un problème mixte  $(P)$  du laplacien dans  $\Omega$ . Il est connu qu'à cause de la présence de cette singularité, la solution  $u$  du problème  $(P)$  n'a pas la régularité  $H^2$ . Est-il possible d'approcher la solution  $u$  par une famille d'éléments qui sont dans  $H^2(\Omega)$ ?

En électrotechnique, on souhaiterait tirer des informations sur la solution du problème dans le domaine avec arrondi à partir de la solution dans le domaine avec angle vif. C'est cette question qui nous a mené à faire cette partie.



# Chapitre 6

## Comparaison en norme des solutions.

### 6.1 Description du problème.

#### 6.1.1 Domaine à point conique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  présentant une singularité conique au voisinage de l'origine et  $\partial\Omega$  sa frontière.

Notons un point de  $\Omega$  par  $(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$  et pour  $\epsilon > 0$  assez petit,  $\Gamma$  la partie de la frontière  $\partial\Omega$  donnée par:

$$\Gamma = \{(x', x_d) \in \partial\Omega \mid -\epsilon \leq x_d \leq \epsilon\}. \quad (6.1.1)$$

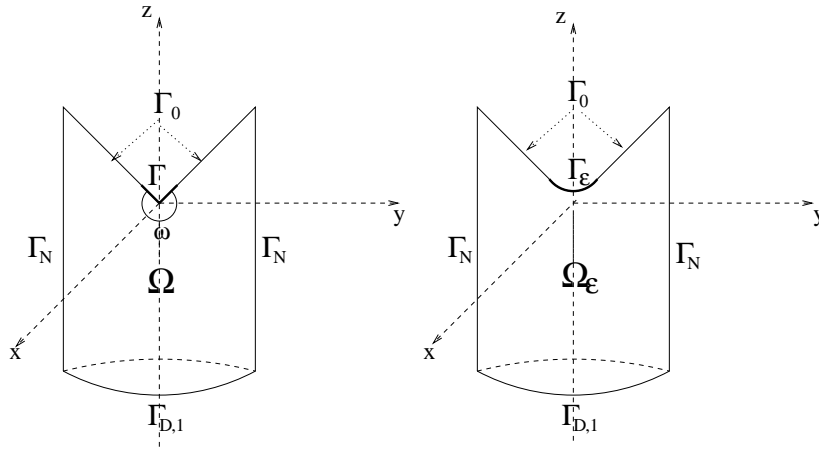


Figure 6.1: Le domaine à point conique et son arrondi

Etant donné  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ . Considérons le problème aux limites suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (6.1.2)$$

où  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  avec  $\Gamma_D = \Gamma_{D,0} \cup \Gamma_{D,1}$ , où  $\Gamma_{D,0} = \Gamma_0 \cup \Gamma$ , cf. Figure 6.1.

### 6.1.2 Domaine arrondi

Le point conique  $O$  a un angle  $\omega$  supérieur à  $\pi$ . La présence de cette singularité entraîne des difficultés pour l'approximation numérique de la solution  $u$  du problème  $(P)$ .

L'idée pour enlever cette singularité est d'arrondir cet angle et de remplacer la courbe  $\Gamma$  par une courbe régulière  $\Gamma_\epsilon$  de telle sorte que ' $\Gamma_\epsilon$  tend vers  $\Gamma$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro'.

Notons  $\Omega_\epsilon$  ce nouveau domaine et  $\partial\Omega_\epsilon$  sa frontière (cf. Figure. 6.1), avec:

$$\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_{D,\epsilon} \cup \Gamma_N \text{ avec } \Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_{D,0,\epsilon} \cup \Gamma_{D,1} \text{ tel que } \Gamma_{D,0,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_\epsilon.$$

Notons aussi  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

Dans la suite, nous allons résoudre le problème  $(P)$  dans le domaine  $\Omega_\epsilon$ , avec  $\tilde{f}$  comme second membre. Notons ce problème par  $(P_\epsilon)$ .

$$(P_\epsilon) \begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ u_\epsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

Nous devons donc comparer la solution obtenue  $u_\epsilon$  avec la solution  $u$  de  $(P)$ .

Nous commençons tout d'abord par établir et rappeler quelques résultats de Rellich, cf. [14], dont nous aurons besoin dans la suite.

## 6.2 Préliminaires

Notons

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \text{ et } V_\epsilon = \{v \in H^1(\Omega_\epsilon) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_{D,\epsilon}\}. \quad (6.2.3)$$

Notons aussi  $\varphi$  l'équation de la courbe  $\Gamma$ ,  $\varphi_\epsilon$  celle de la courbe arrondie  $\Gamma_\epsilon$  et  $x = (x', x_d)$  un point de  $\mathbb{R}^d$  avec  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ .

Remarquons qu'on peut écrire:

$$\Gamma = \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in P\} \text{ et } \Gamma_\epsilon = \{(x', \varphi_\epsilon(x')) \mid x' \in P\} \text{ avec } P \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

**Lemme 6.2.1** *Identité de F.Rellich: soit  $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $m \in C^\infty(\Omega)^d$ . On a*

$$\int_\Omega \Delta v \, m \cdot \nabla v \, dx = - \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div}(m) |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 d\sigma.$$

**Preuve.** La démonstration est très classique, cf. [17]. ■

**Lemme 6.2.2** Si  $v \in H^2(\Omega)$  ne s'annule que sur  $\Gamma_D$  et si de plus la trace de la dérivée normale de  $v$  sur  $\Gamma_N$  est nulle, alors l'identité de Rellich s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta v \, m \cdot \nabla v \, dx &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m) |\nabla v|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_D} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 d\sigma - \int_{\Gamma_N} (m \cdot n) |\nabla_{\tau} v|^2 d\sigma \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** La démonstration est similaire à celle du lemme précédent. En utilisant la formule de Green, il est facile de prouver que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta v \, m \cdot \nabla v \, dx &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m) |\nabla v|^2 dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla v|^2 d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} m \cdot \nabla v \, d\sigma. \end{aligned}$$

$v$  étant nulle sur  $\Gamma_D$ , cela implique que  $\nabla_{\tau} v = 0$  et que sur  $\Gamma_D$ ,  $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial n} n$ . De même  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ , implique que  $\nabla v|_{\Gamma_N} = \nabla_{\tau} v$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla v|^2 d\sigma &= \int_{\Gamma_D} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 d\sigma + \int_{\Gamma_N} (m \cdot n) |\nabla_{\tau} v|^2 d\sigma. \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} m \cdot \nabla v \, d\sigma &= \int_{\Gamma_D} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

## 6.3 Des estimations en norme sur le bord

Nous démontrons quelques résultats qui seront utiles dans la suite.

**Lemme 6.3.1** Pour tout  $v \in V_{\epsilon}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|v\|_{0,\Gamma} \leq C \epsilon^{1/2} \|\nabla v\|_{0,\Omega_{\epsilon} \setminus \Omega}. \quad (6.3.4)$$

**Preuve.** Soit  $x = (x', \varphi(x'))$  un point de  $\Gamma$ , on a

$$v(x', \varphi(x')) = v(x', \varphi_{\epsilon}(x')) + \int_{\varphi_{\epsilon}(x')}^{\varphi(x')} \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', t) dt = \int_{\varphi_{\epsilon}(x')}^{\varphi(x')} \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', t) dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$v^2(x', \varphi(x')) \leq |\varphi(x') - \varphi_{\epsilon}(x')| \int_{\varphi_{\epsilon}(x')}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', t) \right|^2 dt \leq \epsilon \int_{\varphi_{\epsilon}(x')}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', t) \right|^2 dt.$$

Soit  $P$  l'ensemble des  $x'$  tels que  $(x', \varphi(x')) \in \Gamma$ . Intégrons sur  $P$ , on obtient

$$\|v\|_{0,\Gamma}^2 \leq \epsilon \int_P \left( \int_{\varphi_\epsilon(x')}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', t) \right|^2 dt \right) dx',$$

ainsi

$$\|v\|_{0,\Gamma}^2 \leq C\epsilon \left\| \frac{\partial v}{\partial x_d} \right\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega}^2 \leq C\epsilon \|\nabla v\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega}^2,$$

et le lemme est démontré. ■

Puisque  $u_\epsilon \in V_\epsilon$ , un corollaire immédiat du lemme précédent est le suivant:

**Corollaire 6.3.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{0,\Gamma} \leq C\epsilon^{1/2} \|\nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega}. \quad \blacksquare \quad (6.3.5)$$

**Lemme 6.3.2** *Pour tout  $v \in V$  avec  $\Delta v \in L^2(\Omega)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que:*

$$\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_D} \leq C \|\Delta v\|_{0,\Omega}. \quad (6.3.6)$$

**Preuve.** D'après [27], un tel  $v$  a la régularité  $H^{3/2+\delta}$ ,  $\delta > 0$  est assez petit, alors la trace de la dérivée normale  $\frac{\partial v}{\partial n}$  de  $v$  sur  $\partial\Omega$  a un sens et l'estimation est une conséquence de l'identité de Rellich décrite dans le lemme 6.2.2. En effet: pour tout  $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta v \, m \cdot \nabla v \, dx &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m) |\nabla v|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_D} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 d\sigma - \int_{\Gamma_N} (m \cdot n) |\nabla_\tau v|^2 d\sigma \right). \end{aligned}$$

Choisissons le multiplicateur  $m$  de telle sorte que  $m \cdot n \leq 0$  sur  $\Gamma_N$  et  $m \cdot n \geq k > 0$  sur  $\Gamma_D$ . Alors il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_D}^2 &\leq \frac{2}{k} \left( \int_{\Omega} |\Delta v \, m \cdot \nabla v| \, dx + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div}(m)| |\nabla v|^2 dx \right) \\ &\leq C_1 \left( \|\Delta v\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \right) \leq C_1 (C_2 + C_2^2) \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

$C_2$  étant la constante de Poincaré. ■

La solution  $u$  de  $(P)$  vérifie les hypothèses du lemme précédent, d'où:



**Corollaire 6.3.2** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_D} \leq C \|f\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare \quad (6.3.7)$$

**Remarque 6.3.1** *De même, on a  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}$  est dans  $L^2(\partial\Omega_\epsilon)$  et il existe  $C > 0$  telle que*

$$\left\| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_{D,\epsilon}} \leq C \|f\|_{0,\Omega}. \quad \blacksquare \quad (6.3.8)$$

## 6.4 Estimation en norme de la différence des solutions

Le but de cette section est d'établir une estimation de la différence en norme  $H^1$  et en norme  $L^2$  de  $u_\epsilon$  et  $u$  dans un espace convenable.

Notons par  $\tilde{u}$  le prolongement de  $u$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ , on a bien que  $\tilde{u}$  est dans  $H^1(\Omega_\epsilon)$ . Rappelons que la solution  $u$  est dans l'espace  $V$  défini par (6.2.3) et  $u_\epsilon$  est dans  $V_\epsilon$ .

Les résultats principaux de cette section sont les propositions 6.4.1 et 6.4.2.

**Proposition 6.4.1** *Il existe une constante  $C$  positive indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\|\tilde{u} - u_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.4.9)$$

**Preuve.** Soit  $\phi \in V'_\epsilon$ , il existe  $\psi \in V_\epsilon$  telle que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \psi \nabla v \, dx = \langle \phi, v \rangle \quad \forall v \in V_\epsilon,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre l'espace  $V_\epsilon$  et son dual  $V'_\epsilon$ , donc

$$\begin{aligned} \langle \phi, u_\epsilon - \tilde{u} \rangle &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \psi \nabla u_\epsilon \, dx - \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \psi \nabla \tilde{u} \, dx = - \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u_\epsilon \psi \, dx - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla u \, dx \\ &= - \int_{\Omega} f \psi \, dx + \int_{\Omega} f \psi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} \psi \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\langle \phi, u_\epsilon - \tilde{u} \rangle| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_D} \|\psi\|_{0,\Gamma}.$$

En vertu des lemmes 6.3.1 et 6.3.2, on déduit l'estimation (6.4.9).  $\blacksquare$

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est le corollaire suivant:

**Corollaire 6.4.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq C\epsilon^{1/2} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.4.10)$$

**Preuve.** Utilisons l'estimation de la proposition 6.4.1, on obtient

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} = \|u_\epsilon - \tilde{u}\|_{1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq \|u_\epsilon - \tilde{u}\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega}.$$

D'où le corollaire. ■

**Corollaire 6.4.2** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{0,\Gamma} \leq C\epsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.4.11)$$

**Preuve.** C'est une conséquence immédiate du corollaire 6.3.1 et du corollaire précédent. ■

Pour établir une estimation en norme  $L^2$  de la différence de  $u_\epsilon$  et  $u$ , nous utiliserons les résultats précédents.

**Proposition 6.4.2** *Il existe une constante  $C$  positive indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\|\tilde{u} - u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon} \leq C\epsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.4.12)$$

**Preuve.** Soit  $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$  et  $\psi$  solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi &= \phi & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ \psi &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Il est facile de prouver que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \phi(u_\epsilon - \tilde{u})dx = - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} \psi d\Gamma,$$

donc

$$\left| \int_{\Omega_\epsilon} \phi(u_\epsilon - \tilde{u})dx \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma_D} \|\psi\|_{0,\Gamma} \leq C\epsilon \|\phi\|_{0,\Omega_\epsilon} \|f\|_{0,\Omega},$$

ceci grâce aux corollaires 6.4.1 et 6.3.2. D'où le résultat. ■

**Corollaire 6.4.3** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq C\epsilon \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.4.13)$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que

$$\|u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} = \|u_\epsilon - \tilde{u}\|_{0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq \|u_\epsilon - \tilde{u}\|_{0,\Omega_\epsilon},$$

et d'utiliser la proposition précédente. ■

**Remarque 6.4.1** *Nous constatons, qu'il y a une **convergence en norme** de la solution  $u_\epsilon$  vers  $u$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro. ■*

## 6.5 La norme $H^2$ de la solution dans le domaine arrondi pour le cas bidimensionnel

Dans cette section, nous proposons une estimation en norme  $H^2$  de  $u_\epsilon$  dans  $\Omega_\epsilon$  en fonction de  $\epsilon$ , qui diverge quand  $\epsilon$  tend vers zéro.

Rappelons d'abord que le problème qu'on doit résoudre est

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon} \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

avec  $\Gamma_{D,\epsilon} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_\epsilon$ , cf. Figure 2.3. Notons ce problème par  $(P_\epsilon)$ .

**Lemme 6.5.1** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left( \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) dx dy \leq \|f\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 + \frac{C}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma.$$

**Preuve.** Calculons  $\int_{\Omega_\epsilon} |\Delta u_\epsilon|^2 dx dy$ . Par densité et par intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\Delta u_\epsilon|^2 dx dy = \int_{\Omega_\epsilon} \left( \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy + 2 \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} dx dy,$$

d'autre part, on a

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} dx dy = \int_{\Omega_\epsilon} \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} \right|^2 dx dy + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma,$$

donc

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left( \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy + 2 \left| \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} \right|^2 dx dy = \|f\|_{0,\Omega}^2 - 2 \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma.$$

Pour simplifier le calcul de l'intégrale sur le bord, notons  $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$  avec  $\Gamma_0^-$  étant la partie de  $\Gamma_0$  qui correspond à  $x \leq 0$  et  $\Gamma_0^+$  étant celle correspondant à  $x \geq 0$ . Notons aussi  $O_\epsilon^-$  et  $O_\epsilon^+$  les points tels que  $\Gamma_\epsilon \cap \Gamma_0^\pm = \{O_\epsilon^\pm\}$  et  $(\alpha_0^\pm, \beta_0^\pm)$  le vecteur tangent à  $\Gamma_0^\pm$ .

Il est facile de démontrer que:

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma = \frac{\beta_0^+}{2\alpha_0^+} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right)^2 (O_\epsilon^+) - \frac{\beta_0^-}{2\alpha_0^-} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right)^2 (O_\epsilon^-). \quad (6.5.14)$$

Reste à calculer

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma.$$

Sur  $\Gamma_\epsilon$ , on a  $\tau := (\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon) = k(1, \varphi')$  et  $n := (\beta_\epsilon, -\alpha_\epsilon) = k(\varphi', -1)$ , avec  $k = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}$

et  $\varphi$  l'équation paramétrique de  $\Gamma_\epsilon$ , alors  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \tau} = 0$  entraîne que  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = -\varphi' \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y}$ , donc

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma = - \int_{\Gamma_\epsilon} \varphi' \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right) d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_\epsilon} \varphi' \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2 \right) d\sigma.$$

La forme géométrique de  $\Gamma_\epsilon$  que nous avons choisie est une parabole d'équation:

$$\varphi(x) = \frac{c_\omega}{\epsilon} x^2 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{avec } c_\omega = -\frac{1}{2 \tan^2 \frac{\omega}{2}},$$

donc

$$\varphi'(x) = \frac{2c_\omega}{\epsilon} x, \quad \varphi''(x) = \frac{2c_\omega}{\epsilon} \quad \text{et} \quad O_\epsilon^\pm = (x_\epsilon^\pm, -\epsilon) \quad \text{avec } x_\epsilon^\pm = \pm \epsilon |\tan(\frac{\omega}{2})|$$

en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right) d\sigma &= -\frac{1}{2} \left[ \varphi'(x) \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right)^2 (x, \varphi(x)) \right]_{-x_\epsilon^-}^{+x_\epsilon^+} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi') \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{2 |\tan \frac{\omega}{2}|} \left[ \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right)^2 (O_\epsilon^+) - \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right)^2 (O_\epsilon^-) \right] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\epsilon} \varphi'' k \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2 d\sigma, \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \tau} = \nabla \varphi \cdot \tau = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} k, \quad \text{avec } \tau = k(1, \varphi').$$

L'équation du segment  $\Gamma_0^+$  est donnée par:

$$y = -\frac{1}{k_\omega} x \quad \text{avec } k_\omega = |\tan(\frac{\omega}{2})|, \quad \tau := (\alpha_0^+, \beta_0^+) = (1, -\frac{1}{k_\omega}),$$

de même l'équation du segment  $\Gamma_0^-$  est donnée par:

$$y = \frac{1}{k_\omega} x \quad \text{avec } k_\omega = |\tan(\frac{\omega}{2})|, \quad \tau := (\alpha_0^-, \beta_0^-) = (1, \frac{\epsilon}{k_\omega}) \quad \text{et} \quad n = (\frac{1}{k_\omega}, -1).$$

Par conséquent, on déduit que

$$\int_{\partial \Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma = \frac{c_\omega}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} k \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2 d\sigma, \quad (6.5.15)$$

ceci d'une part. D'autre part sur  $\Gamma_\epsilon$ , on a

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = k \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \varphi' - \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right) = k \left( -\frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} (\varphi')^2 - \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right) = -k \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y},$$

donc

$$\left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 = k^2 \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2 = \frac{1}{(1 + (\varphi')^2)} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} \right|^2,$$

et

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma = \frac{c_\omega}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \sqrt{1 + (\varphi')^2} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma,$$

On a  $\varphi'(x) = \frac{2c_\omega}{\epsilon}x$ ; donc sur  $\Gamma_\epsilon$ , on a

$$-\epsilon \left| \tan \frac{\omega}{2} \right| \leq x \leq \epsilon \left| \tan \frac{\omega}{2} \right|, \text{ entraîne que } 1 \leq 1 + (\varphi')^2 \leq \frac{1}{\left| \tan(\frac{\omega}{2}) \right|^2}, \text{ donc}$$

$$\frac{c_\omega}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma \leq \frac{c_\omega}{\epsilon \left| \tan(\frac{\omega}{2}) \right|} \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \|f\|_{0,\Omega}^2 - \frac{2}{\left| \tan(\frac{\omega}{2}) \right|} \frac{c_\omega}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma &\leq \|f\|_{0,\Omega}^2 - 2 \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} n_2 \right) d\sigma \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega}^2 - \frac{2c_\omega}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Soit  $M_0 = (x_0, y_0)$  un point de  $\Omega_\epsilon$ , on définit un champ de vecteurs  $m$  sur  $\bar{\Omega}_\epsilon$  par  $m(P) = \overrightarrow{M_0 P} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ ,  $x$  et  $y$  étant les coordonnées de  $P$ .

Choisissons le point  $M_0$  de telle façon que le champ de vecteurs  $m$  vérifie sur  $\bar{\Omega}_\epsilon$  les conditions suivantes:

$$m.n \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \text{ et } m.n \geq k > 0 \text{ sur } \Gamma_{0,\epsilon}.$$

**Lemme 6.5.2** *On a*

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} (m.n) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma = -2 \int_{\Omega_\epsilon} f(m.\nabla u_\epsilon) dx dy.$$

**Preuve.** C'est une conséquence du lemme 6.2.2 de Rellich. ■

**Proposition 6.5.1** *Il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq C_1 \|\nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon} \|f\|_{0,\Omega_\epsilon}.$$

**Preuve.** Puisque  $m.n \geq k$  sur  $\Gamma_{0,\epsilon}$  et  $m.n \geq 0$  sur  $\partial\Omega_\epsilon$ , on a

$$k \int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq \int_{\Gamma_{0,\epsilon}} (m.n) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq \int_{\partial\Omega_\epsilon} (m.n) \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma,$$

et d'après le lemme précédent

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right|^2 d\sigma \leq \frac{2}{k} \|f\|_{0,\Omega_\epsilon} \|m \cdot \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon},$$

d'où la proposition. ■

**Proposition 6.5.2** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\|u_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \|f\|_{0,\Omega_\epsilon}.$$

**Preuve.** D'après le lemme 6.5.1 et la proposition 6.5.1, on a

$$\|u_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq \|f\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 + \frac{C}{\epsilon} |u_\epsilon|_{1,\Omega_\epsilon} \|f\|_{0,\Omega_\epsilon},$$

or, on sait bien qu'il existe une constante  $C'$  telle que

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq C' \|f\|_{0,\Omega_\epsilon},$$

donc, on a bien

$$\|u_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq \left(1 + \frac{CC'C_1}{\epsilon}\right) \|f\|_{0,\Omega_\epsilon}^2.$$

Ce qui prouve la proposition. ■

## 6.6 Approximation numérique

Dans cette section, nous supposons que  $d = 2$ . Le but est d'établir numériquement les deux estimations suivantes  $\|u_{\epsilon,h} - \tilde{u}_h\|_{i,\Omega_\epsilon}$ ,  $i = 0, 1$ . Sachant que  $u_{\epsilon,h}$  est solution approchée de  $u_\epsilon$  et  $u_h$  est solution approchée de  $u$  par éléments finis, avec  $\tilde{u}_h$  le prolongement de  $u_h$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ .

On maille  $\Omega$ , puis  $\Omega_\epsilon \setminus \Omega$  de **façon conforme**. Notons par  $(T_h)_h$  la triangulation régulière obtenue de  $\Omega$  et par  $(T_{\epsilon,h})_h$  celle de  $\Omega_\epsilon$ .

Définissons les espaces suivants:

$$\begin{aligned} V_{\epsilon,h} &= \{v_h \in H^1(\Omega_\epsilon); \ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_{D,\epsilon} \text{ et } (v_h)_{/K} \in P_1(K), \ \forall K \in (T_{\epsilon,h})_h\}, \\ V_h &= \{v_h \in H^1(\Omega); \ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } (v_h)_{/K} \in P_1(K), \ \forall K \in (T_h)_h\}. \end{aligned}$$

Définissons les problèmes discrets,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que:} \\ a(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \ \forall v_h \in V_h, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\epsilon,h} \in V_{\epsilon,h} \text{ tel que:} \\ a(u_{\epsilon,h}, v_h) = \int_{\Omega_\epsilon} f v_h dx \ \forall v_h \in V_{\epsilon,h}, \end{array} \right\}$$

où  $a(., .)$  est la forme bilinéaire associée à  $-\Delta$ .

Ces deux problèmes admettent des solutions uniques.

Nous rappelons quelques résultats d'approximation, cf. [10][28]. Comme  $\Omega$  est un ouvert non convexe avec un coin rentrant d'angle  $\omega > \pi$ , alors l'ordre de convergence de  $u_h$  vers  $u$  est  $\alpha = \pi/\omega$ , conformément au théorème suivant:

**Théorème 6.6.1** *Il existe une constante  $C$  positive indépendante de  $h$  telle que:*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^\alpha \|f\|_{0,\Omega}, \quad (6.6.16)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{2\alpha} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.6.17)$$

**Preuve.** cf. [51]. ■

**Théorème 6.6.2** *Si la triangulation  $(T_{h,\epsilon})_h$  vérifie les hypothèses suivantes:*

- **H<sub>1</sub>.** *Il existe une constante  $\sigma$  telle que  $\forall K \in \sqcup_h T_{h,\epsilon}, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$ .*
- **H<sub>2</sub>.** *Tout élément fini  $(K, P_K, \Sigma_K)$ ,  $K \in \sqcup_h T_{h,\epsilon}$ , est affinement équivalent à l'élément fini de référence  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ .*
- **H<sub>3</sub>.** *Tout élément fini  $(K, P_K, \Sigma_K)$ ,  $K \in \sqcup_h T_h$ , est de classe  $C^0$ ,*

*et s'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que les inclusions suivantes sont satisfaites:*

$$P_k(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K}),$$

$$H^{k+1}(\hat{K}) \hookrightarrow C^s(\hat{K}),$$

*alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que:*

$$\|u_\epsilon - u_{\epsilon,h}\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega}, \quad (6.6.18)$$

$$\|u_\epsilon - u_{\epsilon,h}\|_{0,\Omega_\epsilon} \leq Ch^2 \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.6.19)$$

**Preuve.** cf. [17]. ■

**Proposition 6.6.1** *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que:*

$$\|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq C[h^\alpha + \epsilon^{1/2} + h] \|f\|_{0,\Omega}, \quad (6.6.20)$$

$$\|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{0,\Omega_\epsilon} \leq C[h^{2\alpha} + \epsilon + h^2] \|f\|_{0,\Omega}. \quad (6.6.21)$$

**Preuve.** Conséquence immédiate des théorèmes 6.4.1, 6.4.2, 6.6.1 et 6.6.2. ■

**Remarque 6.6.1** Dans le cas d'un coin non convexe,  $\alpha$  est compris entre  $1/2$  et  $1$ . On déduit donc d'après la proposition précédente qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et de  $\epsilon$ , telle que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{1,\Omega_\epsilon} &\leq C[h^\alpha + \epsilon^{1/2}]\|f\|_{0,\Omega}, \\ \|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{0,\Omega_\epsilon} &\leq C[h^{2\alpha} + \epsilon]\|f\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Si, de plus:  $\epsilon = h$ , alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{1,\Omega_\epsilon} &\leq Ch^{1/2}\|f\|_{0,\Omega}, \\ \|\tilde{u}_h - u_{\epsilon,h}\|_{0,\Omega_\epsilon} &\leq Ch\|f\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$



# Chapitre 7

## Le problème axisymétrique.

### Introduction

Dans ce chapitre, nous supposons que  $d = 3$  et que le problème  $(P)$  donné par (6.1.2) est axisymétrique.

Pour simplifier les notations, notons par  $(P)$  le problème  $(P)$ ,  $\Omega$  l'ouvert  $\Omega$ ,  $\mathbf{u}$  la solution  $u$  du problème  $(P)$  et par  $\mathbf{f}$  son second membre.

Nous rappelons que dans ce cas le problème  $(P)$  peut se réduire à un problème dans un ouvert polygonal  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  de second membre  $f := \mathbf{f}|_{\Omega}$  restriction de  $\mathbf{f}$  à  $\Omega$ . On a vu dans la deuxième partie, Chapitre 1, que la solution  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}(r, \theta, z) = u(r, z), \quad (7.0.1)$$

$r$ ,  $\theta$  et  $z$  étant les coordonnées cylindriques associées à  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et  $u$  la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_r u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (7.0.2)$$

où  $\Delta_r$  est l'opérateur défini par:  $\Delta_r v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ .

Le but de ce chapitre est de déduire les mêmes estimations prouvées dans le chapitre précédent pour  $u$  et  $u_\epsilon$  à partir de celles de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}_\epsilon$ .

### 7.1 Des estimations en norme des solutions

Nous commençons d'abord par établir quelques relations entre  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_\epsilon$  et  $u$ ,  $u_\epsilon$ .

Tout d'abord, nous rappelons la notation  $||\cdot||_{1,k,\Omega}$  de la norme relative aux espaces de

Sobolev avec poids  $H_1^k(\Omega)$ , cf. Section 5.3:

$$H_1^0(\Omega) := L_1^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, tel que } \int_{\Omega} |v|^2 r \, dr \, dz < \infty\} \quad (7.1.3)$$

$$H_1^k(\Omega) = \{v \in L_1^2(\Omega), \text{ tel que } \int_{\Omega} |D^\beta v|^2 r \, dr \, dz < \infty\}, \quad |\beta| \leq k. \quad (7.1.4)$$

**Lemme 7.1.1** *On a*

$$\|\mathbf{u}_\epsilon - \tilde{\mathbf{u}}\|_{k, \Omega_\epsilon} = \sqrt{2\pi} \|u_\epsilon - \tilde{u}\|_{1, k, \Omega_\epsilon}, \quad k = 0, 1, \quad (7.1.5)$$

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{k, \Omega_\epsilon \setminus \Omega} = \sqrt{2\pi} \|u_\epsilon\|_{1, k, \Omega_\epsilon \setminus \Omega}, \quad k = 0, 1, \quad (7.1.6)$$

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{0, \Gamma} = \sqrt{2\pi} \|u_\epsilon\|_{1, 0, \Gamma}, \quad k = 0, 1. \quad (7.1.7)$$

**Preuve.** Pour la troisième égalité, il suffit de remarquer que la mesure superficielle  $d\Gamma$  de  $\Gamma$  est égale à  $r \, d\theta \, d\Gamma$ , où  $d\Gamma$  est celle de  $\Gamma$ . ■

**Corollaire 7.1.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\tilde{u} - u_\epsilon\|_{1, 1, \Omega_\epsilon} \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{1, 0, \Omega}, \quad (7.1.8)$$

$$\|\tilde{u} - u_\epsilon\|_{1, 0, \Omega_\epsilon} \leq C\epsilon \|f\|_{1, 0, \Omega}, \quad (7.1.9)$$

$$\|u_\epsilon\|_{1, 0, \Gamma} \leq C\epsilon \|f\|_{1, 0, \Omega}. \quad (7.1.10)$$

**Preuve.** C'est une conséquence du lemme 7.1.1 et des propositions 6.4.1 et 6.4.2. ■

## 7.2 Estimation en norme de la différence des solutions du problème de Laplacien modifié

Dans cette section, nous montrons les estimations du corollaire 7.1.1 par un calcul direct.

### 7.2.1 Préliminaires

Notons d'abord  $W$  et  $W_\epsilon$  les espaces des solutions admissibles pour  $u$  et  $u_\epsilon$ :

$$W = \{v \in H_1^1(\Omega) \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \text{ et } W_\epsilon = \{v \in H_1^1(\Omega_\epsilon) \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \Gamma_{D, \epsilon}\}. \quad (7.2.11)$$

Notons aussi  $\varphi$  l'équation de la courbe  $\Gamma$ ,  $\varphi_\epsilon$  celle de la courbe arrondie  $\Gamma_\epsilon$ .

Remarquons qu'on peut écrire:

$$\Gamma = \{(r, \varphi(r)) \mid r \in P\} \text{ et } \Gamma_\epsilon = \{(r, \varphi_\epsilon(r)) \mid r \in P\} \text{ avec } P \subset \mathbb{R}.$$

**Lemme 7.2.1** Soit  $v \in H_1^2(\Omega)$  tel que  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $m \in C^\infty(\Omega)^2$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_r v \, m \cdot \nabla v \, r \, dr \, dz &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} r \, dr \, dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(mr) |\nabla v|^2 r \, dr \, dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 r \, d\Sigma, \quad \text{avec } x_1 = r \text{ et } x_2 = z. \end{aligned}$$

**Preuve.** La démonstration est similaire à celle de l'identité de Rellich. Posons  $x_1 = r$  et  $x_2 = z$ . En utilisant la formule de Green, il est facile de prouver que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_r v \, m \cdot \nabla v \, r \, dr \, dz &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} r \, dr \, dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m) |\nabla v|^2 r \, dr \, dz \\ &- \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla v|^2 r \, d\Sigma + \int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial n} m \cdot \nabla v \, r \, d\Sigma. \end{aligned}$$

$v$  étant nulle sur  $\partial\Omega$ , cela implique que  $\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$  sur  $\partial\Omega$  et que  $\nabla v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} n$ . Par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla v|^2 r \, d\Sigma = \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 r \, d\Sigma \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} m \cdot \nabla v \, r \, d\Sigma = \int_{\partial\omega} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 r \, d\Sigma.$$

D'où le résultat. ■

**Lemme 7.2.2** Si  $v \in H_1^2(\Omega)$  ne s'annule que sur  $\Gamma_D$  et si de plus la trace de la dérivée normale de  $v$  sur  $\Gamma_N$  est nulle, alors l'identité précédente s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_r v \, m \cdot \nabla v \, r \, dr \, dz &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} r \, dr \, dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(mr) |\nabla v|^2 r \, dr \, dz \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_D} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 r \, d\Sigma - \int_{\Gamma_N} (m \cdot n) \left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right|^2 r \, d\Sigma \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle du lemme précédent. ■

**Lemme 7.2.3** Pour tout  $v \in W_\epsilon$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|v\|_{1,0,\gamma} \leq C \epsilon^{1/2} \|\nabla v\|_{1,0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega}. \quad (7.2.12)$$

**Preuve.** Il suffit de poser  $w(r, z) = \sqrt{r} v(r, z)$  et de remarquer que

$$w(r, \varphi(r)) = \int_{\varphi_\epsilon(r)}^{\varphi(r)} \frac{\partial w}{\partial z}(r, s) \, ds,$$

et d'utiliser ensuite la technique déjà utilisée dans la démonstration du lemme 6.3.1. ■

**Lemme 7.2.4** *Pour tout  $v \in W$  avec  $\Delta_v \in L_1^2(\omega)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que:*

$$\frac{\partial v}{\partial n} \in L_1^2(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{1,0,\Gamma_D} \leq C \|\Delta v\|_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.13)$$

**Preuve.** La démonstration est identique à celle du lemme 6.3.2. Il suffit de remarquer qu'un tel  $v$  a la régularité nécessaire pour que la trace de la dérivée normale de  $v$  ait un sens, et d'utiliser ensuite le lemme 7.2.2. ■

**Corollaire 7.2.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in L_1^2(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{1,0,\Gamma_D} \leq C \|f\|_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.14)$$

**Preuve.** Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme précédent. ■

## 7.2.2 Estimation en norme de la différence des solutions

Dans cette section on va établir une estimation de la différence en norme  $H_1^1$  et en norme  $L_1^2$  de  $u_\epsilon$  et  $u$  dans un espace convenable, d'une façon similaire de la section 6.4.

Notons par  $\tilde{u}$  le prolongement de  $u$  par zéro à  $\Omega_\epsilon$ , on a bien que  $\tilde{u}$  est dans  $H_1^1(\Omega_\epsilon)$ . Rappelons que la solution  $u$  est dans l'espace  $W$  et  $u_\epsilon$  est dans  $W_\epsilon$ .

**Proposition 7.2.1** *Il existe une constante  $C$  positive indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$\|\tilde{u} - u_\epsilon\|_{1,1,\Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.15)$$

**Preuve.** Soit  $\phi$  tel que  $\Delta_r \psi = \phi$  avec  $\psi \in W_\epsilon$ . Si on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  le crochet de dualité entre l'espace  $W_\epsilon$  et son dual  $W'_\epsilon$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \phi, u_\epsilon - \tilde{u} \rangle_1 &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \psi \nabla u_\epsilon r \, dr \, dz - \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \psi \nabla \tilde{u} r \, dr \, dz \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} \Delta_r u_\epsilon \psi r \, dr \, dz - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla u r \, dr \, dz \\ &= - \int_{\Omega} f \psi r \, dr \, dz + \int_{\Omega} f \psi r \, dr \, dz - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi r d\Gamma = - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} \psi r d\Gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\langle \phi, u_\epsilon - \tilde{u} \rangle| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{1,0,\Gamma_D} \|\psi\|_{1,0,\Gamma}.$$

En vertu des lemmes 7.2.3 et 7.2.4, on déduit l'estimation (7.2.15). ■

**Corollaire 7.2.2** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$||u_\epsilon||_{1,1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq C\epsilon^{1/2} ||f||_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.16)$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que

$$||u_\epsilon||_{1,1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} = ||u_\epsilon - \tilde{u}||_{1,1,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq ||u_\epsilon - \tilde{u}||_{1,1,\Omega_\epsilon}$$

et d'utiliser ensuite la proposition précédente. ■

**Corollaire 7.2.3** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$||u_\epsilon||_{1,0,\Gamma} \leq C\epsilon ||f||_{1,0,\Gamma}. \quad (7.2.17)$$

**Preuve.** C'est une conséquence immédiate du lemme 7.2.3 et du corollaire précédent. ■

**Proposition 7.2.2** *Il existe une constante  $C$  positive indépendante de  $\epsilon$  telle que*

$$||\tilde{u} - u_\epsilon||_{1,0,\Omega_\epsilon} \leq C\epsilon ||f||_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.18)$$

**Preuve.** Soit  $\phi \in L_1^2(\Omega_\epsilon)$  et  $\psi$  solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_r \psi &= \phi & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ \psi &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D,\epsilon}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Il est facile de prouver que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \phi(u_\epsilon - \tilde{u})r \, dr \, dz = - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} \psi \, r \, d\Gamma,$$

d'après les lemmes 7.2.3 et 7.2.4, on a

$$| \int_{\Omega_\epsilon} \phi(u_\epsilon - \tilde{u})r \, dr \, dz | \leq ||\frac{\partial u}{\partial n}||_{1,0,\Gamma_D} ||\psi||_{1,0,\Gamma} \leq C\epsilon ||\phi||_{1,0,\Omega_\epsilon} ||f||_{1,0,\Omega},$$

D'où le résultat. ■

**Corollaire 7.2.4** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$||u_\epsilon||_{1,0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq C\epsilon ||f||_{1,0,\Omega}. \quad (7.2.19)$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que

$$||u_\epsilon||_{1,0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} = ||u_\epsilon - \tilde{u}||_{1,0,\Omega_\epsilon \setminus \Omega} \leq ||u_\epsilon - \tilde{u}||_{1,0,\Omega_\epsilon},$$

et d'utiliser ensuite la proposition précédente. ■



# Annexe1: Passage d'un problème non homogène à un problème homogène

## .1 Le problème du laplacien dans un polygone

Considérons l'ouvert  $\Omega$  défini par la figure 1 et le problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (.1.20)$$

Supposons  $h_0$  dépendant que de l'ordonnée  $y$ . Pour des questions de précision dans des calculs approchés nous transformons le problème (.1.20) en un autre problème équivalent pour lequel les données aux bords sont toutes nulles, mais le second membre ne l'est plus.

Cette transformation se fait en deux étapes.

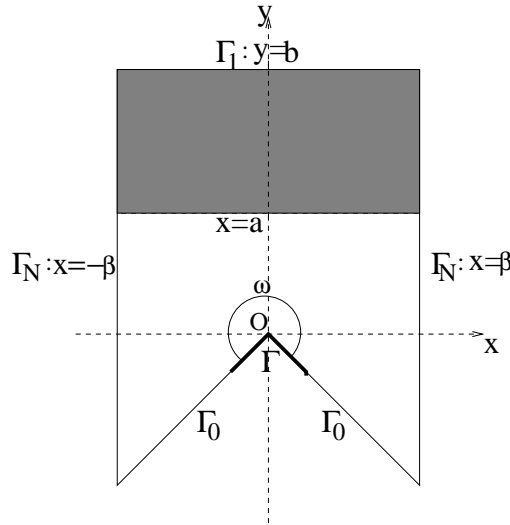


Figure 1: Le domaine  $\Omega$

**Étape 1.** Cherchons un élément  $w \in H^2(\Omega)$  vérifiant

$$w = h_0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \quad (.1.21)$$

Remarquons qu'on peut trouver plusieurs  $w$  dans  $H^2(\Omega)$  vérifiant cette propriété. Le polynôme  $w$  défini par

$$w(x, y) = \begin{cases} -\frac{(y-a)^2}{(b-a)^2} h_0 + h_0 & \text{si } a \leq y \leq b, \text{ } x \text{ quelconque,} \\ h_0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est dans  $H^2(\Omega)$  et vérifie (.1.21).

Il est clair que pour tout  $x$  tel que  $-\beta \leq x \leq \beta$ , on a:

$$w(x, a) = h_0, \quad w'(x, a) = 0 \text{ et } w(x, b) = 0.$$

De plus

$$w''(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{(b-a)^2} g(y) + h_0'' & \text{si } a \leq y \leq b, \text{ } x \text{ quelconque,} \\ h_0'' & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

avec  $g$  définie par:  $g(y) = 2h_0 + 4(y-a)h_0' + (y-a)^2 h_0''$ .

Remarquons que lorsque  $h_0$  est constante,  $g$  vaut  $2h_0$ .

Donc,  $w$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{dans } \Omega, \\ w = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

avec  $f$  la fonction de  $L^2(\Omega)$  donnée par  $f = -w''$ .

**Étape 2.** Posons  $v = w - u$ , alors  $v$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (.1.22)$$

Donc, on a ramené un problème qui avait un second membre nul et des données aux bords non toutes nulles, à un problème de second membre non nul avec des données aux bords toutes nulles.

## .2 Le problème du laplacien modifié

Considérons l'ouvert  $\Omega$  défini par la figure 2 et le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta_\delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = h_0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (.2.23)$$



avec  $\Delta_\delta = \frac{1}{r^\delta} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta$ ,  $\delta = 1$  ou  $-1$  et  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

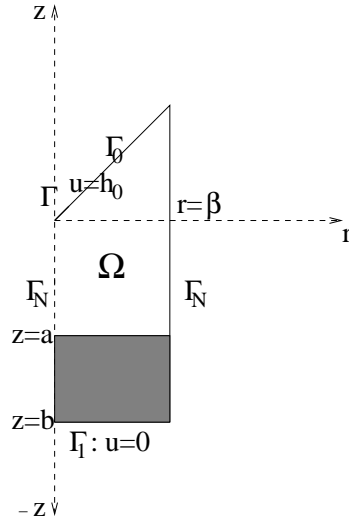


Figure 2: Le domaine  $\Omega_\epsilon$

En procédant de la même manière que dans le paragraphe précédent, on prouve que  $v := w - u$ , avec  $w \in H_1^2(\Omega)$  défini par:

$$w(r, z) = \begin{cases} -\frac{(z-a)^2}{(a-b)^2} h_0 + h_0 & \text{si } b \leq z \leq a, \text{ } r \text{ quelconque,} \\ h_0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_\delta v = f & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (.2.24)$$

avec

$$f := -\Delta_\delta w(r, z) = \begin{cases} \frac{1}{(a-b)^2} g(z) + h_0'' & \text{si } b \leq z \leq a, \text{ } r \text{ quelconque,} \\ h_0'' & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où  $g(z) = 2h_0 + 4(z-a)h_0' + (z-a)^2 h_0''$ .



# Résumé

Dans ce présent travail, nous proposons une problématique issue de l'électrotechnique: de nombreux dispositifs présentent des singularités géométriques qui sont productrices de phénomènes indésirables. Pour éviter ces phénomènes, les pièces sont lissées. Dans le procédé de lissage, celui ci est fait simultanément pour un grand nombre de pièces et la forme définitive n'est pas nécessairement uniforme.

Nous nous sommes intéressés à deux types de problèmes d'électrostatique: pour l'un, il s'agit du laplacien dans un polygone plan non convexe et l'autre dans une géométrie axisymétrique. Les solutions de ces problèmes présentent des singularités, d'où l'intérêt du lissage des pièces pour avoir des solutions régulières. Le but ainsi de ce travail est d'obtenir des informations sur le champ électrique une fois le lissage fait et à partir de la connaissance de la solution éléments finis dans le modèle avec singularité, éventuellement sans faire de calcul direct pour le champ modifié.

Mathématiquement, l'analyse des problèmes aux limites qui modélisent ces phénomènes au voisinage de ces singularités montre que le comportement physique particulier de ces configurations est certainement lié au comportement singulier des solutions. Typiquement, lorsqu'un potentiel constant est imposé sur la frontière singulière (le domaine d'étude formant un angle obtus), le gradient normal du potentiel tend vers l'infini au point singulier.

Nous avons étudié dans ce travail les liens qui peuvent exister entre:

1. D'une part, le comportement singulier des solutions de problèmes modèles comportant une singularité géométrique (angle vif en 2D, point conique et arête en 3D axisymétrique), au voisinage de cette singularité ;
2. D'autre part, le comportement des solutions au voisinage de ces mêmes singularités géométriques, une fois arrondies.

Ainsi,

- Dans une géométrie axisymétrique, l'effet de l'axisymétrie, nous permet de réduire les problèmes à des problèmes bidimensionnels pour un **laplacien modifié**.
- La structure singulière de la solution (potentiel  $V$ ) dans un modèle avec singularité est déterminée par: la fonction singulière  $S$ , l'exposant de singularité  $\nu$  et le coefficient de singularité  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$V = \lambda r^\nu S + \text{terme régulier.}$$

- Le champ électrique **approché** au milieu de l'arrondi se comporte comme le rayon de courbure moyen  $\epsilon$ , à la puissance de  $(\nu - 1)$  multiplié par une constante  $K$ , qui dépend de la géométrie et des conditions aux limites.

**Mots-Clés:** Singularités géométriques, polygone, géométries axisymétriques, laplacien, laplacien modifié, coefficient de singularité, exposant de singularité.

# Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS. *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN. *Legendre Functions*, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, p. 331-339, 1972.
- [3] M. AMARA, M. MOUSSAOUI. *Approximation of solution and singularities coefficients for an elliptic problem in a plan polygonal domain*,
- [4] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT. *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Meth. Appl. Sci., 21, p. 823-864, 1998.
- [5] F. ASSOUS, P. CIARLET. *Une caractérisation de l'orthogonal de  $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$  dans  $L^2(\Omega)$* , C. R. Acad. Sci. paris, t. 325, Série I, p. 605-610, 1997.
- [6] F. ASSOUS, P. CIARLET, S. LABRUNIE, *Theoretical tools to solve the axisymmetric Maxwell equations*, E.N.S.T.A, Rapport de Recherche n: 343 (Décembre 2000).
- [7] F. ASSOUS, P. CIARLET, S. LABRUNIE, *Resolution of axisymmetric Maxwell equation*, E.N.S.T.A, Rapport de Recherche (July 2001).
- [8] F. ASSOUS, P. CIARLET, S. LABRUNIE, *Caractérisation des singularités et résolution des équations de Maxwell stationnaires en géométrie axisymétrique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t 328, Série I, p. 767-772, 1999.
- [9] M. AUBOURG, S. MENGUE. *Champs électromagnétiques en présence de singularités d'arêtes*, NUMELEC'2000: 3 ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, 20 - 21 - 22 Mars 2000. Futuroscope Poitiers. IRCOM.

- [10] A. BENDALI, *Approximation of a degenerated elliptic boundary value problem by a finite element method*, RAIRO. Analyse numérique/Numerical Analysis (vol. 15, n: 2, 1981, p.87 à 99)
- [11] C. BERNARDI, M. DAUGE, Y. MADAY, *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, SERIES IN APPLIED MATHEMATICS. Series Editors: P.G.CIARLET and P.-L.LIONS (1999).
- [12] C. BERNARDI, G. RAUGEL. *Méthodes d'éléments finis mixtes pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes dans un polygone non convexe*, Calcolo, 18, p. 255-291, 1981.
- [13] F. BREZZI. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [14] A. CHAIRA. *Perturbations de domaines Contrôlabilité exacte et ouverts lipschitziens*, Doctorat d'état, Université de Kenitra, Maroc, Juin 2001.
- [15] A. CHAIRA. *Modification de la solution d'un problème aux limites par perturbation du domaine*, Thèse de doctorat, Université de Nice, 1983.
- [16] A. CHAIRA. *Equation des ondes et régularité sur un ouvert lipschitzien*, C. R. Acad. Paris, t.316, Série I, p. 33-36, 1993.
- [17] P.G. CIARLET, J.L. LIONS. *Finite element methods Volume II(Part 1)* , Handbook of Numerical Analysis. North Holland. 1991.
- [18] M. COSTABEL, M. DAUGE. *Espaces fonctionnels Maxwell: Les gentils, les méchants et les singularités*.
- [19] M. COSTABEL, M. DAUGE. *Singularités des équations de Maxwell dans un polyèdre* C.R. Acad. Sci. Paris, t 324, Série I, p. 1005-1010, 1997.
- [20] M. DAUGE, S. NICAISE, M. BOURLAND, J.M.-S. LUBUMA. *Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. I) Résultats généraux pour le problème de Dirichlet* , R.A.I.R.O Mathematical Modeling and Numerical Analysis (vol. 24, n:1, 1990).
- [21] M. DAUGE, S. NICAISE, M. BOURLAND, J.M.-S. LUBUMA. *Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. II) Quelques opérateurs particuliers*. R.A.I.R.O Mathematical Modeling

and Numerical Analysis (vol. 24, n:3, 1990).

- [22] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematics 1341. Springer-verlag (1988).
- [23] R. DAUTRAY, J. L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, t. 1-2-3, 1985.
- [24] P. DESTUYNDER, M. DJAOUA. *Estimation de l'erreur sur le coefficient de la singularité de la solution d'un problème elliptique sur un ouvert avec coin*, R.A.I.R.O Analyse numérique/ Numerical Analysis (vol. 14, n 3, 1980, p. 239 à 248).
- [25] E. DURAND. *Electrostatique II. Problèmes généraux conducteurs*, Masson. 1966.
- [26] H. EL BOUZID. *Méthodes d'éléments finis raffinés pour quelques problèmes aux limites dans des domaines non-réguliers*, Thèse de Mathématiques Appliquées à l'université de Valenciennes, 1996.
- [27] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics 24. Pitman 1985 .
- [28] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Research Notes in Applied Mathematics. Series Editors: P.G CIARLET and J.-L.LIONS. Springer-verlag 1992.
- [29] P. GRISVARD. *Problème de Dirichlet dans un domaine non régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris., t. 278, Série A, P.1615-1617, 1974.
- [30] P. GRISVARD. *Singular solutions of elliptic boundary problems in polyhedra*, Portugaliae Mathematic, 41, p. 367-382, 1982.
- [31] G. HARDY, D. LITTLEWOOD, G. POLYA. *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.
- [32] B. HEINRICH. *Singularity functions at axisymmetric edges and their representation by Fourier series*, Math. Meth. Appl. Sci., 16, p. 837-854, 1993.
- [33] V.A. KONDRATIEV. *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. 16, p 227-313.

- [34] M. TH. LACROIX. *Comparaison des solutions de problèmes associés à un opérateur elliptique dans des domaines de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  présentant une singularité, et lorsqu'on supprime la singularité*, Rev. Mat. Apl. 14:19-30, 1993.
- [35] P. LAURENT-GENGOUX, D. NEVEU. *Calcul des singularités par la méthode des éléments finis*, R.A.I.R.O Mathematical Modeling and Numerical Analysis (vol. 24, n:1, 1990).
- [36] J.L. LIONS, E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [37] S. LOHRENGEL. *Etude mathématique et résolution numérique des équations de Maxwell dans un domaine non régulier*, Thèse d'analyse numérique à l'université PARIS 6, 1998.
- [38] J. M.-S. LUBUMA, S. NICAISE. *Dirichlet problems in polyhedral domains I: Regularity of the solutions*, Math. Nach, 168, p. 243-261, 1994.
- [39] J. M.-S. LUBUMA, S. NICAISE. *Dirichlet problems in polyhedral domains II: Approximation by FEM and BEM*, J. Comp. Appl. Math., 61, p. 13-27, 1995.
- [40] J. M.-S. LUBUMA, S. NICAISE. *Méthodes d'éléments finis raffinés pour le problème de Dirichlet dans des polyèdres*, C. R. Acad. Sc. Paris, 315, Série I, p. 1207-1210, 1992.
- [41] J. M.-S. LUBUMA, S. NICAISE. *Méthode de fonctions singulières pour problèmes aux limites avec singularités d'arêtes*, C. R. Acad. Sci., Paris, Série I, 319, p. 1109-1114, 1994.
- [42] B. LUCQUIN, O. PIRONNEAU. *Introduction au calcul scientifique*, MASSON. 1996.
- [43] P.M. MORSE, H.FESHBACH. *Methods of Theoretical Physics*, Part I. New York: McGraw-Hill, pp. 597-600, 1953.
- [44] M.A. MOUSSAOUI. *Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coins*, Lect Notes in Mathematics 1121. Springer-Verlag 1983.



- [45] M. MOUSSAOUI. *Espaces  $H(\text{div}, \text{rot}; \Omega)$  dans un polygone plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.322, Série I, P. 225-229, 1996.
- [46] M. MOUSSAOUI, V. H. TRAN. *Sur les coefficients de singularités des solutions de l'équation des ondes dans un polygone plan*, C. R. Acad. Sci. Paris., t. 316, Série I, p. 257-260, 1993.
- [47] J. NECAS. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [48] T. V. PETERSDORFF, E. P. STEPHAN. *Decomposition in edge and corner singularities for the solution of the Dirichlet problem of the Laplacien in a polyhedron*, Math. Nachr. 149, p. 71-104, 1990.
- [49] P. A. RAVIART, E. SONNENDRUKER. *Approximate models for the Maxwell equation*, J. Comput. Appl. Math. 63, p. 69-81, 1995.
- [50] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson. 1983.
- [51] G. RAUGEL. *Résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines avec coins*, Thèse de 3ème cycle, Rennes 1978.
- [52] A.H. SHATZ, L.B. WAHLBIN. *Maximum Norm Estimates in the Finite Element Method on Plane Polygonal Domains*,
- [53] J. SPANIER, K.B. OLDHAM. *The Legendre Functions  $P_\nu(x)$  and  $Q_\nu(x)$* , Atlas of Functions. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1952.
- [54] O. C. ZIENKIEWICZ. *La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur*, Ediscience Paris, 1973.

## Analyse et analyse numérique des singularités en électromagnétisme

### Mots clés :

Singularités géométriques, polygone, géométries axisymétriques, laplacien, laplacien modifié, coefficient de singularité, exposant de singularité.

### Résumé :

Dans ce travail, nous proposons une problématique issue de l'électrotechnique: de nombreux dispositifs présentent des singularités géométriques qui sont productrices de phénomènes indésirables. Pour éviter ces phénomènes, les pièces sont lissées. Dans le procédé de lissage, celui ci est fait simultanément pour un grand nombre de pièces et la forme définitive n'est pas nécessairement uniforme.

Le but essentiel de ce travail, c'est d'obtenir des informations sur le champ électrique une fois le lissage fait et à partir de la connaissance de la solution éléments finis dans le modèle avec singularité, éventuellement sans faire de calcul direct pour le champ modifié.

*In this work, we propose problems resulting from electrical engineering: many devices present geometrical singularities, which are producing undesirable phenomena. To avoid these phenomena, the parts are smoothed. In the process of smoothing, that Ci is done simultaneously for a great number of parts and the final form is not necessarily uniform.*

*The essential goal of this work, it is to obtain information on the electric field once made smoothing and starting from the knowledge of the solution finite elements in the model with singularity, possibly without making direct calculation for the modified field.*

---

### Direction de recherche :

M. MOUSSAOUI, Professeur des Universités

Laboratoire MAPLY – UMR CNRS n° 5585 – <http://numerix.univ-lyon1.fr/>

L. KRÄHENBÜHL, Directeur de Recherche au CNRS – [Laurent.Krahenbuhl@ec-lyon.fr](mailto:Laurent.Krahenbuhl@ec-lyon.fr)

Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY) - UMR CNRS n° 5005 – <http://cegely.cnrs.fr>

Ecole Centrale de Lyon - 69134 Ecully Cedex – France – <http://www.ec-lyon.fr>